費波那契數列連續和之探討

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

（一）獨立研究課程的目的：

1. 培養學生研究的興趣與精神
2. 提供學生實際研究的經驗
3. 加強學生研究方法的訓練
4. 培養學生獨立及自學的能力
5. 提高學生問題解決的能力
6. 發展學生高層思考的能力

（二）獨立研究課程的目標：

1. 使學生親自體驗、發現及解決問題的過程。
2. 使學生熟練探討專門領域之知能：心智與操作技能。
3. 使學生學習相關知識。
4. 培養學生研究態度。
5. 啟發並增進學生心智思考經驗。

（三）獨立研究課程規劃原則：

	課程安排	師生參與課程方式
中年級	1.獨立研究基礎能力初探 2.小專題的模擬和訓練	1.全部學生皆需修課。 2.教師採協同方式上課。
五年級	1.以獨立研究為課程主軸。 2.獨立研究作品評析。 3.以個人或分組方式進行獨立研究。 4.完成作品並發表。	1.全部學生皆需修課。 2.分成數學、自然與生活科技和人文科學三組。 3.各作品有第一指導老師，另協同指導。
六年級	1.以專題研究、科展研究為課程主軸。 2.科展作品、專題報告之評析。 3.以個人或分組方式進行科展研究。 4.完成作品並發表。	1.由學生依研究興趣決定修課與否。 2.專題研究採全部上課和討論。 3.科展研究採分組進行研究和指導。 3.各作品有第一指導老師，另協同指導。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

1.獨立研究基礎能力課程：

單元名稱	授課內容摘要
如何選定研究主題	1. 研究主題的分類。 2. 研究主題實例討論。 3. 練習訂定不同類別的研究主題。 4. 研究主題分享和討論。
如何收集參考資料	1. 參考資料有哪些。 2. 收集參考資料的管道和可利用的工具。 3. 分享和討論。
篩選並統整參考資料	1. 參考資料的歸檔和分類。 2. 參考資料的呈現。 3. 分享和討論。
研究方法與計畫	1. 認識研究方法。 2. 依主題決定研究方法並擬定研究計畫。 3. 分享並討論研究方法與計畫。
問卷的編製	1. 認識問卷編製的方法和過程。 2. 問卷編製練習和實作。 3. 問卷的分享和討論。
資料的統計與分析	1. 問卷資料的轉換和建檔。 2. Excel 程式的介紹和練習。 3. 問卷資料的統計和分析結果。 4. 分享分析結果和討論
自然科學獨立研究	1. 閱讀自然科學類獨立研究。 2. 找尋相關主題並訂定子題。 3. 收集相關資料並進行文獻探討。 4. 擬定研究方法和計畫。 5. 分享並討論研究計畫。
人文社會獨立研究	1. 閱讀人文社會類獨立研究。 2. 找尋相關主題並訂定子題。 3. 收集相關資料並進行文獻探討。 4. 擬定研究方法和計畫。 5. 分享並討論研究計畫。

數學獨立研究	1. 閱讀數學類獨立研究。 2. 找尋相關主題並訂定子題。 3. 收集相關資料並進行文獻探討。 4. 擬定研究方法和計畫。 5. 分享並討論研究計畫。
實驗式獨立研究	1. 閱讀實驗式獨立研究。 2. 找尋相關主題並訂定子題。 3. 收集相關資料並進行文獻探討。 4. 擬定研究方法和實驗計畫。 5. 分享並討論研究計畫。
研究問題、困難的解決	1. 進行研究時如何發現問題和困難。 2. 記錄研究時產生的問題和困難 3. 找尋解決問題、困難的方法和資源。

2.獨立研究作品實作課程：

單元名稱	授課內容摘要
獨立研究主題初探	1. 從日常生活中找尋想要研究的主題。 2. 找尋與主題相關研究的資訊。 3. 分析研究主題的困難和可行性。
擬定工作進度表	1. 研究工作之分析。 2. 擬定年度工作進度表。
擬定初步 研究問題及研究目的	1. 決定初步決定可研究的問題。 2. 決定初步的研究目的。
找尋相關資源	1. 尋找相關研究及文獻。 2. 找尋進行研究時所需的研究工具。 3. 找尋可提供相關資訊的專家或老師。
擬定正式 研究問題及研究目的	1. 修正或剔除不可行的研究問題。 2. 修正研究目的。 3. 確認正式的研究問題及目的。
研究計畫發表會	1. 撰寫正式研究計畫前四章節。 2. 舉辦研究計畫發表會。 3. 研究計畫優缺點分析和導論。 4. 研究計畫修正。

進行研究	1. 進行研究和記錄研究結果。 2. 隨時提出遇到的困難和疑問。 3. 分析和討論解決研究困難的方法。
提出研究成果	1. 分析取得的研究結果。 2. 繪製相關表格和圖。 3. 撰寫研究結果。 4. 分析和討論並提出研究結論。
成果發表會與分享	1. 製作成果發表海報或 PPT 檔。 2. 舉辦成果發表會。 3. 作品優缺點分析與討論。

3. 101 學年度獨立研究作品實作課程：

101 學年度五 年 級 獨 立 研 究 課 程 計 畫		
課程名稱	獨立研究	
課程時間	星期一、五（午休 12：40~13：20）	
授課老師		
課程目標	綜 1-3-3-3 在日常生活中，持續發展自己的興趣與專長。 自 1-3-4-1 能由一些不同來源的資料，整理出一個整體性的看法。 自 1-3-5-5 能傾聽他人報告並對於他人報告提出自己的看法。 自 1-3-1-1 能依規劃的實驗步驟來執行操作。 自 6-3-2-3 面對問題時，能做多方思考，提出解決方法 自 7-3-0-1 察覺運用實驗或科學的知識，可推測可能發生的事 資 5-3-1 能找到合適的網站資源、圖書館資源，會檔案傳輸。	
評量方式	1.上課表現與討論情形（出缺席、用具準備、學習態度、動機與互動）30% 2.作業繳交（撰寫研究日誌、學習單）30% 3.期末發表（書面佔 20%；口頭報告佔 20%）	
課程目標、內容與評量		
課程內容	**學生學習目標**	**評量**

【研究調整】 聚焦研究方向 擬定延續計畫	□能整理並說明上學期研究內容，並展示分享給同學 □能規劃整學期研究計畫、說明成果	觀察評量 紙筆評量
【研究再出發】 蒐集相關資料文獻 蒐集研究器材工具 進行研究方法	□能依據文獻發現新研究方向 □能依據研究蒐集相關資源 □能依據研究進行方法確認	實作評量
【研究方法修正與繕寫】 ① 實驗研究法 ② 問卷研究法~問卷編製、修改、發放。	□能依據研究計畫執行研究 □能依據研究目標繼續修正自己的研究	實作評量
【研究精進】 進行研究修正 進行研究資料分析	□能依據研究計畫執行研究 □能依據研究目標繼續修正自己的研究	紙筆評量 實作評量
【結果與討論】 修正與繕寫 資料整理與分析	□能對研究整體過程統整結果 □能針對研究結果統整結論 □能針對研究結果加以討論	實作評量
【研究分享】 製作主題領域的 研究成果分享成果完成專題研究電子檔	□能將檔案資料資訊化 □能說明自己的研究並展示研究成果	實作評量 口頭報告
學生成果發表	形式：靜態 內容： 1. 書面方式呈現學生的主題報告。 2. 以口語發表的方式呈現自己的主題報告。 3. 參加縣內獨立研究比賽。	

第二階段 獨立研究階段

壹、摘要

寒假閱讀了一本書《黃金比例 1.618033989.....的祕密》，對此數列產生興趣，費波那契數列有很多規律，其中我最好奇的是 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$ 此規律，想深入探討，所以就訂了四項研究目的：

一、介紹費波那契數列

二、費波那契數列的規律

三、費波那契數列連續和的倍數之探討

四、費波那契數列連續和是其中一項的倍數之探討

利用 *Excel* 觀察連續項的和：每 3 個連續項的和是偶數(2 的倍數)、每 6 個連續項的和是 4 的倍數、每 10 個連續項的和是 11 的倍數……，進一步利用 $F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_k=F_{k+2}-F_2$ 是 m 的倍數、$F_2+F_3+F_4+\ldots\ldots+F_{k+1}=F_{k+3}-F_3$ 是 m 的倍數來得到費波那契數列連續 k 個的和是 m 的倍數。

繼續觀察連續項的和是其中一項的倍數：$F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_6=4F_5$，$F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_{10}=11F_7$，$F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_{14}=29F_9$……，進一步利用 $F_{n+p}=F_p\times F_{n+1}+F_{p-1}\times F_n$、$F_{n-q}=(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}+(-1)^qF_{q+1}\times F_n$ 來得到費波那契數列連續 $4k-2$ 項的和是其中一項的倍數。

貳、選擇主題

之前在我查資料時，本來想做黃金比例的題目，但是黃金比例的範圍實在太廣了，想要縮小題目範圍。

後來寒假閱讀了一本書《黃金比例 1.618033989.....》，對此數列產生興趣，費波那契數列有很多規律，其中我最好奇的是 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$ 此規律，試著寫寫看連續 3 個項的和：1＋1＋2＝4、1＋2＋3＝6、2＋3＋5＝10、……似乎都是 2 的倍數；連續 4 個項的和：1＋1＋2＋3＝7、1＋2＋3＋5＝11、……卻只是 1 的倍數而已，我對此規律更加感興趣，於是開始著手研究神秘的費波那契數列連續和。

參、擬定工作進度表

工作進度表	日期	工作概要
1.擬訂題目	3/1-3/15	尋找數學科獨立研究的題目和參考歷屆數學科獨立研究作品題目，後來因為寒假的科學營有提到費波那契數列，對此數列產生興趣，所以把主題放在費波那契數列上。
2.研究目的	3/16-4/1	後來發現費波那契數列有很多規律，其中我最好奇的是 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+......+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$ 此規律，想深入探討，所以就訂了研究目的。
3.開始研究	4/1-7/31	對於費波那契數列的規律深入探討。
4.結論	8/1-9/1	完成費波那契數列的研究成果。
5.完成摘要	9/1-10/1	研究出結果後再回來寫摘要。

肆、擬定初步的研究問題

一、了解費波那契數列

二、費波那契數列規律與 *Lucas* 數列規律之比較

三、費波那契數列與 *Lucas* 數列連續和的倍數之比較

伍、尋找資源

一、歷屆科展作品-費伯那西？盧卡斯？向日葵到底愛誰？

二、黃金比例 1.618033989.....其中的目錄–無所不在費波那契數列

三、維基百科關鍵字搜尋:費波那契數列

四、電腦軟體：*Excel*(做為觀察用品)

陸、擬定正式計畫及研究問題

經過閱讀費波那契數列相關書籍，以及網路的搜尋，已經逐漸了解費波那契數列有趣的規律及應用，又因為 *Lucas* 數列與費波那契數列只有初始兩項值的不同，所以其規律與性質幾乎相同，因此改變我的研究問題，而擬定下列正式計畫及研究問題：

了解費波那契數列的產生和用途 ⇨ 了解費波那契數列的規律 ⇨ 深入探討 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$ 此規律

記錄研究發現和證明 ⇨ 記錄結果與討論 ⇨ 完成作品

研究問題

一、介紹費波那契數列－粗略的敘述費波那契數列在生活中的用處和產生。

二、費波那契數列的規律－介紹一些眾所周知的規律。

三、費波那契數列連續和的倍數之探討－證明每一個正整數 m 必存在 k 個連續費波那契數列和是 m 的倍數。

四、費波那契數列連續和是其中一項的倍數之探討－證明費波那契數列連續 $4k-2$ 項的和是其中一項的倍數。

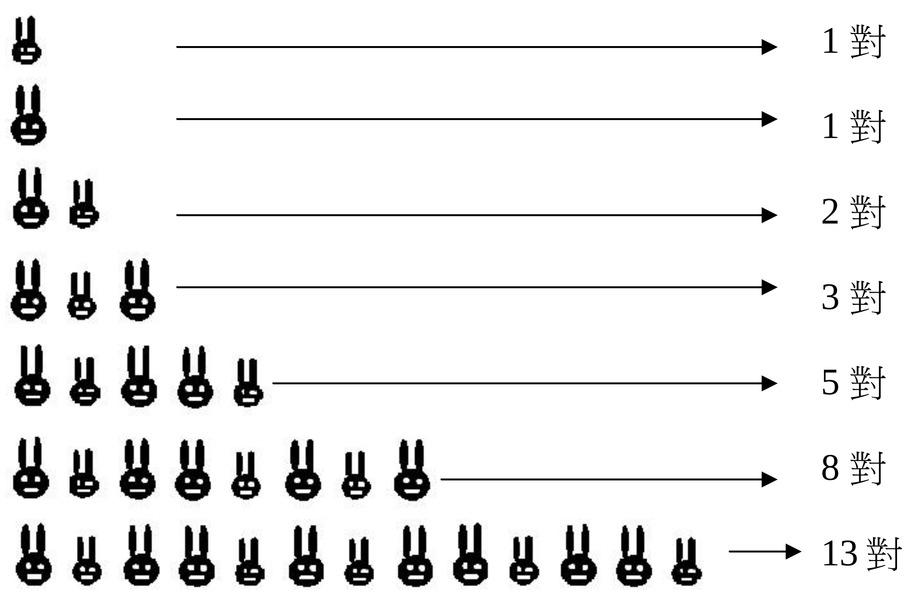
柒、記錄研究的發現

一、介紹費波那契數列

(一)費波那契數列的產生

費波那契數列的由來是費波納奇提出一個問題：某人放了一對幼兔在一個四面包圍的地方，假設每個月每一對成兔會生出一對幼兔，而幼兔一個月後會變成一對成兔，且幼兔一個月後又能再生一對幼兔，那麼一年中，會生出幾對兔子？

圖 1－1：兔子成長數量



由上圖 1－1 得知：第一個月有 1 對兔子、第二個月有 1 對兔子、第三個月有 2 對兔子、第四個月有 3 對兔子、第五個月有 5 對兔子……我們將每個月生的兔子數變成一個數列：1、1、2、3、5、8、13、21……

(二)費波那契數列生活上的應用

1.光線的光學：我們將二片種類稍異(指有不同的折射系數)的玻璃片，面面相合排列，當我們把光照向其中一片，這光線在射出之前會被這四個反射面所反射，也就是說，他們可以直接穿過不受到反射，或者在射出前可以被內反射 1 次、2 次、3 次等等，也有可能可以在內反射無限多次；所有這些途徑都符合光學原理。讓我們算一下可以從這兩片玻璃系統中反射出來的光線數目(如果沒有反射，那麼只有一道光線射出)，折射圖形如下圖 1－2。

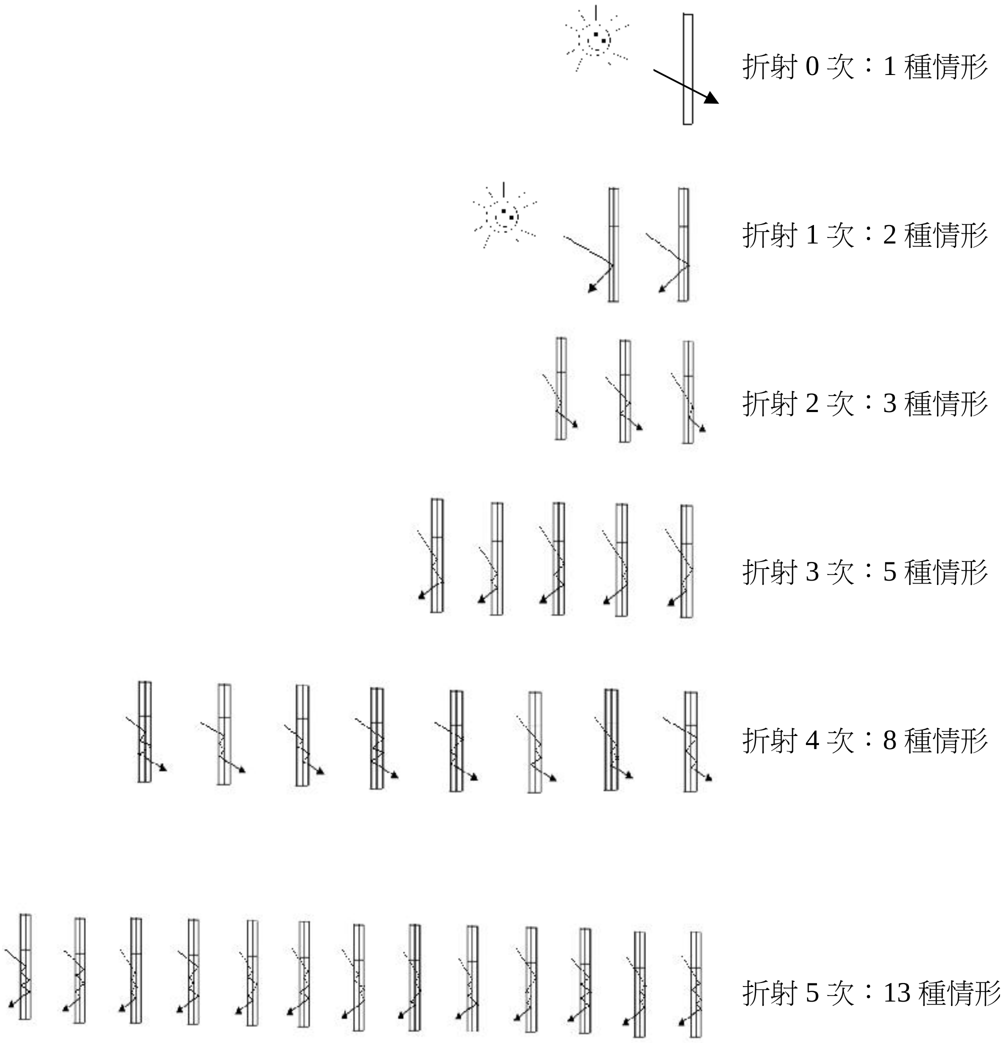
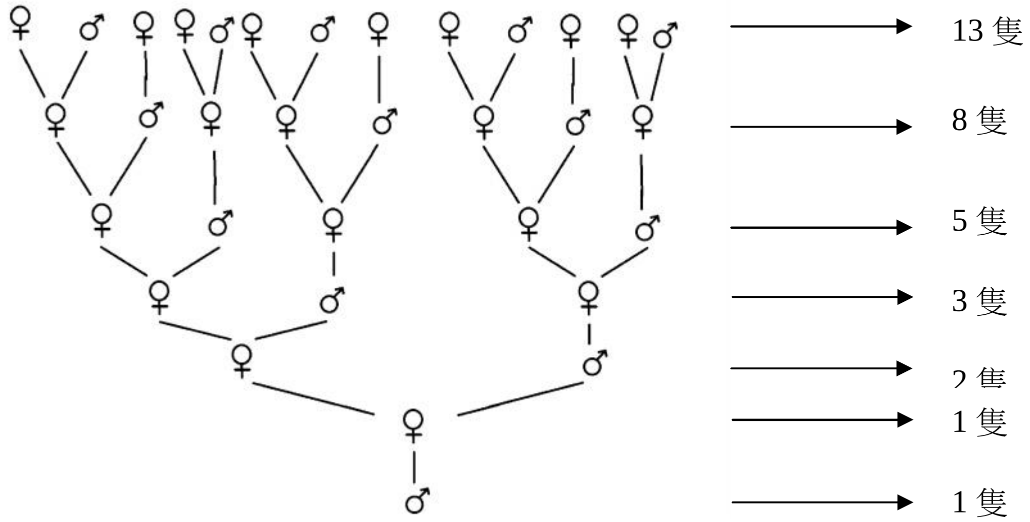


圖 1－2：光線折射圖

由圖 1－2 所知，兩片的折射可能性，從折射 0 次開始，分別是 1、2、3、5、8、13……種情形，這也就形成了費波那契數列。

2.雄蜂家族祖譜：雄蜂家族的祖譜很奇特，工蜂的卵可以不受精而成長為雄蜂，因此雄蜂沒有「爸爸」只有「媽媽」；而蜂后的卵卻可以從雄蜂處受精，發育成雌蜂(不是變成工蜂，就變成蜂后)因此，一隻雌蜂有「爸爸」也有「媽媽」。所以，一隻雄蜂只有媽媽，他的媽媽有爸爸和媽媽，他媽媽的爸爸只有媽媽，他媽媽的媽媽有爸爸和媽媽…，祖譜如圖 1－3



二、費波那契數列的規律

費波那契數列跟大自然是多麼的有關係，費波那契數列本身就有一些不可思議的規律。首先，我們將費波那契數列代替為 F，而 F_1 就是費波那契數列的第 1 項，而 F_2 就是費波那契數列的第 2 項……，依此類推，F_n 就是費波那契數列的第 n 項。費波那契數列規律眾多，然而對於我所要研究

「$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\dots\dots+F_{n+9}$ 是 11 的倍數」相關的規律列舉如下：

(一) $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

$F_3=F_2+F_1$；$F_4=F_3+F_2$；$F_5=F_4+F_3$……依此類推 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

(二) $F_1+F_2+F_3+\dots\dots+F_n=F_{n+2}-1$

證明：

$$F_1+F_2+F_3+\dots\dots+F_n=(F_3-F_2)+(F_4-F_3)+(F_5-F_4)+\dots\dots+(F_{n+2}-F_{n+1})$$
$$=F_{n+2}-F_2=F_{n+2}-1$$

例如:1＋1＋…＋34＝89－1

(三) $F_{n+p}=F_p\times F_{n+1}+F_{p-1}\times F_n$

證明：

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n=F_2\times F_{n+1}+F_1\times F_n$

$F_{n+3}=F_{n+2}+F_{n+1}=(F_{n+1}+F_n)+F_{n+1}=2\times F_{n+1}+F_n=F_3\times F_{n+1}+F_2\times F_n$

$F_{n+4}=F_{n+3}+F_{n+2}=(F_3\times F_{n+1}+F_2\times F_n)+(F_2\times F_{n+1}+F_1\times F_n)$

$=(F_3+F_2)\times F_{n+1}+(F_2+F_1)\times F_n=F_4\times F_{n+1}+F_3\times F_n$

以此類推，$F_{n+p}=F_p\times F_{n+1}+F_{p-1}\times F_{n+9}$

(舉例在第四張有詳解)

(四) $F_{n-q}=(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}+(-1)^qF_{q+1}\times F_n$

證明：

$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n=F_1\times F_{n+1}-F_2\times F_n$

$F_{n-2}=F_n-F_{n-1}=F_n-(F_{n+1}-F_n)=2F_n-F_{n+1}=-F_2\times F_{n+1}+F_3\times F_n$

$F_{n-3}=F_{n-1}-F_{n-2}=(F_1\times F_{n+1}-F_2\times F_n)-(-F_2\times F_{n+1}+F_3\times F_n)$

$=(F_1+F_2)\times F_{n+1}-(F_2+F_3)\times F_n=F_3\times F_{n+1}-F_4\times F_n$

以此類推，$F_{n-q}=(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}+(-1)^qF_{q+1}\times F_n$

(舉例在第四張有詳解)

三、費波那契數列連續和的倍數之探討

當我在蒐集資料時，找到了一些有關於費波那契數列連續和的規律，像每 3 個連續項的和是偶數(2 的倍數)跟每 6 個連續項的和是 4 的倍數，而且我在書中又找到每 10 個連續項的和是 11 的倍數；我在想是還有哪些固定個數的連續費波那契數列和會是某一個正整數的倍數呢？於是使用 *Excel* 軟體來幫忙尋找看看…….

表 3-1 項數和與倍數關係表

費波那契數列	連續 3 項和	連續 4 項和	連續 5 項和	連續 6 項和	連續 7 項和	連續 8 項和
1						
1						
2	4					
3	6	7				
5	10	11	12			
8	16	18	19	20		
13	26	29	31	32	33	
21	42	47	50	52	53	54
34	68	76	81	84	86	87
55	110	123	131	136	139	141
89	178	199	212	220	225	228
144	288	322	343	356	364	369
233	466	521	555	576	589	597
377	754	843	898	932	953	966
610	1220	1364	1453	1508	1542	1563
987	1974	2207	2351	2440	2495	2529
1597	3194	3571	3804	3948	4037	4092
2584	5168	5778	6155	6388	6532	6621
4181	8362	9349	9959	10336	10569	10713
6765	13530	15127	16114	16724	17101	17334
10946	21892	24476	26073	27060	27670	28047
倍數	2 的倍數			4 的倍數		3 的倍數

我發現這樣的找法太不方便，又想到上一張所講到的規律 $F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_n=F_{n+2}-F_2$，所以想要知道還有哪一些固定個數的連續費波那契數列和會是某一個正整數的倍數，可以從兩個項相減的值去尋找！例如說：

$1+1+2+3+\ldots\ldots+144=377-1=376$、376 也就是 8 的倍數

既然要以兩個項相減的值去尋找，所以只要觀察每一個費波那契數列除以某一個正整數的餘數，會比較容易發現哪一些固定個數的連續費波那契數列和會是某一個正整數的倍數。

表 3-2 餘數和倍數循環表

數列	除 2 餘數	除 3 餘數	除 4 餘數	除 5 餘數	除 6 餘數	除 7 餘數	除 8 餘數	除 9 餘數	除 10 餘數
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	0	3	3	3	3	3	3	3
5	1	2	1	0	5	5	5	5	5
8	0	2	0	3	2	1	0	8	8
13	1	1	1	3	1	6	5	4	3
21	1	0	1	1	3	0	5	3	1
34	0	1	2	4	4	6	2	7	4
55	1	1	3	0	1	6	7	1	5
89	1	2	1	4	5	5	1	8	9
144	0	0	0	4	0	4	0	0	4
233	1	2	1	3	5	2	1	8	3
377	1	2	1	2	5	6	1	8	7
610	0	1	2	0	4	1	2	7	0
987	1	0	3	2	3	0	3	6	7
1597	1	1	1	2	1	1	5	4	7
2584	0	1	0	4	4	1	0	1	4
4181	1	2	1	1	5	2	5	5	1
6765	1	0	1	0	3	3	5	6	5
10946	0	2	2	1	2	5	2	2	6
17711	1	2	3	1	5	1	7	8	1
28657	1	1	1	2	1	6	1	1	7
46368	0	0	0	3	0	0	0	0	8
75025	1	1	1	0	1	6	1	1	5
121393	1	1	1	3	1	6	1	1	3
196418	0	2	2	3	2	5	2	2	8
317811	1	0	3	1	3	4	3	3	1
514229	1	2	1	4	5	2	5	5	9
832040	0	2	0	0	2	6	0	8	0
1346269	1	1	1	4	1	1	5	4	9
2178309	1	0	1	4	3	0	5	3	9
3524578	0	1	2	3	4	1	2	7	8
5702887	1	1	3	2	1	1	7	1	7
9227465	1	2	1	0	5	2	1	8	5
14930352	0	0	0	2	0	3	0	0	2
24157817	1	2	1	2	5	5	1	8	7
39088169	1	2	1	4	5	1	1	8	9
63245986	0	1	2	1	4	6	2	7	6
102334155	1	0	3	0	3	0	3	6	5
165580141	1	1	1	1	1	6	5	4	1
267914296	0	1	0	1	4	6	0	1	6
433494437	1	2	1	2	5	5	5	5	7
701408733	1	0	1	3	3	4	5	6	3
1134903170	0	2	2	0	2	2	2	2	0
1836311903	1	2	3	3	5	6	7	8	3
2971215073	1	1	1	3	1	6	1	1	3
4807526976	0	0	0	1	0	5	0	0	6
7778742049	1	1	1	4	1	4	1	1	9
12586269025	1	1	1	0	1	2	1	1	5
20365011074	0	2	2	4	2	6	2	2	4
32951280099	1	0	3	4	3	1	3	3	9
53316291173	1	2	1	3	5	0	5	5	3
86267571272	0	2	0	2	2	1	0	8	2
139583862445	1	1	1	0	1	1	5	4	5
225851433717	1	0	1	2	3	3	5	3	7
365435296162	0	1	2	2	4	5	2	7	2
591286729879	1	1	3	4	1	1	7	1	9
956722026041	1	2	1	1	5	6	1	8	1
1548008755920	0	0	0	0	0	0	0	0	0
循環	3 個	8 個	6 個	20 個	24 個	16 個	12 個	24 個	60 個

循環代表什麼意思呢？以除以 10 的最後一欄為例，每 60 個連續費波那契數列和是 10 的倍數！那麼我們真的可以對每一個正整數都找得到固定個數連續費波那契數列和是它的倍數嗎？以下附上證明。

每一個正整數 m 必存在 k 個連續費波那契數列和是 m 的倍數，

也就是說 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+k-1}$ 是 m 的倍數

證明：

① $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+k-1}$

$=(F_{n+2}-F_{n+1})+(F_{n+3}-F_{n+2})+(F_{n+4}-F_{n+3})+\ldots\ldots+(F_{n+k+1}-F_{n+k})$

$=\cancel{F_{n+2}}-F_{n+1}+\cancel{F_{n+3}}-\cancel{F_{n+2}}+\cancel{F_{n+4}}-\cancel{F_{n+3}}+\ldots\ldots\ldots+F_{n+k+1}-\cancel{F_{n+k}}=F_{n+k+1}-F_{n+1}$

例如：$F_9+F_{10}+F_{11}+\cdots\cdots+F_{19}+F_{20}$

$=(F_{11}-F_{10})+(F_{12}-F_{11})+(F_{13}-F_{12})+(F_{14}-F_{13})+\cdots+(F_{21}-F_{20})+(F_{22}-F_{21})$

$=F_{22}-F_{11}$

② 若 $F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_k=F_{k+2}-F_2$ 是 m 的倍數、

$F_2+F_3+F_4+\ldots\ldots+F_{k+1}=F_{k+3}-F_3$ 是 m 的倍數，

則 $F_3+F_4+F_5+\ldots\ldots+F_{k+2}=F_{k+4}-F_4=(F_{k+3}+F_{k+2})-(F_3+F_2)=(F_{k+3}-F_3)+(F_{k+2}-F_2)$是 m 的倍數；

$F_2+F_3+F_4+\ldots\ldots+F_{k+1}=F_{k+3}-F_3$ 是 m 的倍數、

$F_3+F_4+F_5+\ldots\ldots+F_{k+2}=F_{k+4}-F_4$ 是 m 的倍數，

則 $F_4+F_5+F_6+\ldots\ldots+F_{k+3}=F_{k+5}-F_5=(F_{k+4}+F_{k+3})-(F_4+F_3)=(F_{k+4}-F_4)+(F_{k+3}-F_3)$是 m 的倍數，

以此類推，對於每一個正整數 n，$F_{n+k+1}-F_{n+1}$ 皆是 m 的倍數。

③ 證明：必存在正整數 k 使得$(F'_{k+2}, F'_{k+3})=(F'_2, F'_3)$

將費波那契數列除以 m 所得餘數為 F'_1、F'_2、F'_3、F'_4、…且 $F'_k\equiv F'_{k-1}+F'_{k-2}(mod\ m)$

因為除以 m 所得餘數只有 $0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1$ 為考慮數對(F'_k, F'_{k+1})只有可能 $m\times m$ 種可能，根據鴿籠原理，必存在$(F'_a, F'_{a+1})=(F'_b, F'_{b+1})$，此時 $F'_{a-1}=F'_{a+1}-F'_a$、$F'_{b-1}=F'_{b+1}-F'_b$，$(F'_{a-1}, F'_a)=(F'_{b-1}, F'_b)$………，以此類推，存在正整數 k 使得$(F'_{k+2}, F'_{k+3})=(F'_2, F'_3)$

比如說：$F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6=F_8-F_2=1+1+2+3+5+8=20$ 是 4 的倍數、

$F_2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7=F_9-F_3=1+2+3+5+8+13=32$ 是 4 的倍數

$\Rightarrow F_3+F_4+F_5+F_6+F_7+F_8=F_{10}-F_4=20+32=52$ 是 4 的倍數，

以此類推，對於每一個正整數 n，$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+F_{n+3}+F_{n+4}+F_{n+5}=F_{n+7}-F_{n+1}$ 皆是 4 的倍數。

四、費波那契數列連續和是其中一項的倍數之探討

我發現每 10 個連續項的和是 11 的倍數而且還會是這 10 個連續項中的第 5 項的 11 倍呢！可是並不是所有費波那契數列連續和是費波那契數列中其中一個數的倍數，因此我又起了好奇心來研究它，我先一一研究過後再發現有什麼規律。

(一) $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}=F_{n+2}\times 2$

證明：$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}=(F_{n+2})+F_{n+2}=F_{n+2}\times 2$

(二) $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+5}=F_{n+4}\times 4$

證明：$(F_n+F_{n+1})+F_{n+2}+F_{n+3}+F_{n+4}+F_{n+5}=(2F_{n+2}+F_{n+3})+F_{n+4}+F_{n+5}$

$=3F_{n+4}-F_{n+3}+F_{n+5}=3F_{n+4}+(F_{n+5}-F_{n+3})=3F_{n+4}+F_{n+4}=4F_{n+4}$

(三) $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$

想要仿照(一)、(二)的方式去證明似乎會很複雜，只好另謀他途了。

(四) $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+7}\neq 3F_m$

費波那契數列連續 8 個項的和是 3 的倍數，卻不是 $F_n\sim F_{n+7}$ 當中一項的倍數。

費波那契數	連續 3 個項的和是 2 的倍數	連續 8 個項的和是 3 的倍數	連續 6 個項的和是 4 的倍數	連續 20 個項的和是 5 的倍數	連續 24 個項的和是 6 的倍數	連續 16 個項的和是 7 的倍數	連續 12 個項的和是 8 的倍數
1							
1							
2	4						
3	6						
5	10						
8	16		20				
13	26		32				
21	42	54	52				
34	68	87	84				
55	110	141	136				
89	178	228	220				
144	288	369	356				376
233	466	597	576				608
377	754	966	932				984
610	1220	1563	1508				1592
987	1974	2529	2440			2583	2576
1597	3194	4092	3948			4179	4168
2584	5168	6621	6388			6762	6744
4181	8362	10713	10336			10941	10912
6765	13530	17334	16724	17710		17703	17656
10946	21892	28047	27060	28655		28644	28568
17711	35422	45381	43784	46365		46347	46224
28657	57314	73428	70844	75020		74991	74792
46368	92736	118809	114628	121385	121392	121338	121016
75025	150050	192237	185472	196405	196416	196329	195808
121393	242786	311046	300100	317790	317808	317667	316824
196418	392836	503283	485572	514195	514224	513996	512632
317811	635622	814329	785672	831985	832032	831663	829456
是否為其中一項的倍數	是	否	是	否	否	否	否

表 4-1

連續項數和是否為費波那契數列其中一項的數

我們想要知道哪些可以，又有什麼規律。我們改由觀察連續項和。

數列						
1						
1		*A*	*B*	*A*, *B* 的最大公因數 *D*	*A*÷*D*	*B*÷*D*
2	3 項和	4	6	2	2	3
3	4 項和	7	11	1	7	11
5	5 項和	12	19	1	12	19
8	6 項和	20	32	4	5	8
13	7 項和	33	53	1	33	53
21	8 項和	54	87	3	18	29
34	9 項和	88	142	2	44	71
55	10 項和	143	231	11	13	21
89	11 項和	232	375	1	232	375
144	12 項和	376	608	8	47	76
233	13 項和	609	985	1	609	985
377	14 項和	986	1595	29	34	55
610	15 項和	1596	2582	2	798	1291
987	16 項和	2583	4179	21	123	199
1597	17 項和	4180	6763	1	4180	6763
2584	18 項和	6764	10944	76	89	144
4181	19 項和	10945	17709	1	10945	17709
6765	20 項和	17710	28655	55	322	521
10946	21 項和	28656	46366	2	14328	23183
17711	22 項和	46367	75023	199	233	377
28657	23 項和	75024	121391	1	75024	121391
46368	24 項和	121392	196416	144	843	1364
75025	25 項和	196417	317809	1	196417	317809
121393	26 項和	317810	514227	521	610	987
196418	27 項和	514228	832038	2	257114	416019
317811	28 項和	832039	1346267	377	2207	3571
514229	29 項和	1346268	2178307	1	1346268	2178307
832040	30 項和	2178308	3524576	1364	1597	2584

由此可知連續 3 項和、連續 6 項和、連續 10 項和、連續 14 項和、……、連續 30 項和會是它們的其中一項的倍數！

我們左思右想，再配合費波那契數列的規律，想到了一個辦法，以連續 10 項和會是它們的其中一項的 11 倍為例：

$F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_{10}=F_{12}-F_2$，其中$\begin{cases}F_{12}=F_{6+6}=F_6\times F_7+F_5\times F_6\\ F_2=F_{6\text{-}4}=-F_4\times F_7+F_5\times F_6\end{cases}$

$F_1+F_2+F_3+\ldots\ldots+F_{10}=F_{12}-F_2=(F_6\times F_7+F_5\times F_6)-(-F_4\times F_7+F_5\times F_6)$

$=F_6\times F_7+F_4\times F_7=(F_6+F_4)\times F_7=11\times F_7$

例如：$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times 11$

證明：由 $F_{n+p}=F_p\times F_{n+1}+F_{p\text{-}1}\times F_n$、$F_{n\text{-}q}=(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}+(-1)^qF_{q+1}\times F_n$

$F_{n+11}=F_{(n+5)+6}=F_6\times F_{n+6}+F_5\times F_{n+5}$、$F_{n+1}=F_{(n+5)\text{-}4}=(-1)^5F_4\times F_{n+6}+(-1)^4F_5\times F_{n+5}$

$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+11}-F_{n+1}=(F_6\times F_{n+6}+F_5\times F_{n+5})-(-F_4\times F_{n+6}+$
$F_5\times F_{n+5})=(F_6+F_4)\times F_{n+6}=11\times F_{n+6}$

費波那契數列連續 $4k-2$ 項的和是其中一項的倍數

證明：由 $F_{n+p}=F_p\times F_{n+1}+F_{p\text{-}1}\times F_n$、$F_{n\text{-}q}=(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}+(-1)^qF_{q+1}\times F_n$，

$F_{n+p}-F_{n\text{-}q}$ 時

① $F_p\times F_{n+1}$ 和 $(-1)^{q+1}F_q\times F_{n+1}$ 減掉，則 $(-1)^{q+1}>0\Rightarrow q$ 為奇數且 $F_p=F_q$，

令 $p=q=2k-1\Rightarrow(n+p)-(n-q)=4k-2$

$F_1+F_2+\ldots\ldots+F_{4k\text{-}2}=F_{4k}-F_2\overset{n=2k+1}{=\!=\!=}(F_{2k\text{-}2}+F_{2k})F_{2k+1}$

② $F_{p\text{-}1}\times F_n$ 和 $(-1)^qF_{q+1}\times F_n$ 減掉，則 $(-1)^q>0\Rightarrow q$ 為偶數且 $F_{p\text{-}1}=F_{q+1}$，

令 $p-1=q+1=2k-1\Rightarrow p=2k$、$q=2k-2\Rightarrow(n+p)-(n-q)=4k-2$

$F_1+F_2+\ldots\ldots+F_{4k\text{-}2}=F_{4k}-F_2\overset{n=2k}{=\!=\!=}(F_{2k}+F_{2k\text{-}2})F_{2k+1}$

例如： ① $F_{20}=F_mF_6+F_kF_7$

$F_8=F_6+F_7$、$F_9=F_7+F_8=F_6+2F_7$、$F_{10}=F_8+F_9=2F_6+3F_7=F_3F_6+F_4F_7$

$F_{11}=F_9+F_{10}=3F_6+5F_7=F_4F_6+F_5F_7$

以此類推 $F_{20}=F_{13}F_6+F_{14}F_7$

② $F_6=(-1)F_mF_{19}+F_kF_{20}$

$F_{18}=-F_{19}+F_{20}$

$F_{17}=-F_{18}+F_{19}=2F_{19}-F_{20}$

$F_{16}=-F_{17}+F_{18}=-3F_{19}+2F_{20}=-F_4F_{19}+F_3F_{20}$

$F_{15}=-F_{16}+F_{17}=5F_{19}-3F_{20}=F_5F_9-F_4F_{20}$

以此類推 $F_6=(-1)F_{14}F_{19}+F_{13}F_{20}$

捌、提出研究成果

經過一番思索與 *Excel* 軟體的觀察和測試，並且用紙筆做符號的運算得到以下兩個費波那契數列連續和的結果：

一、每一個正整數 m 必存在 k 個連續費波那契數列和是 m 的倍數，

也就是說 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+k-1}$ 是 m 的倍數。

比如：3 個連續費波那契數列和是 2 的倍數；

8 個連續費波那契數列和是 3 的倍數；

6 個連續費波那契數列和是 4 的倍數；

20 個連續費波那契數列和是 5 的倍數；

24 個連續費波那契數列和是 6 的倍數；

16 個連續費波那契數列和是 7 的倍數；

12 個連續費波那契數列和是 8 的倍數；

24 個連續費波那契數列和是 9 的倍數；

60 個連續費波那契數列和是 10 的倍數……。

二、費波那契數列連續 $4k-2$ 項的和是其中一項的倍數，

也就是說 $F_1+F_2+\ldots\ldots+F_{4k-2}=(F_{2k}+F_{2k-2})F_{2k+1}$

比如說：

費波那契數列連續 $4k-2$ 項的和	A	B
6 項和	$20=4F_5$	$32=4F_6$
10 項和	$143=11F_7$	$231=11F_8$
14 項和	$986=29F_9$	$1595=29F_5$
18 項和	$6764=76F_{11}$	$10944=76F_{12}$
22 項和	$46367=199F_{13}$	$75023=199F_{14}$
26 項和	$317810=521F_{15}$	$514227=521F_{16}$
30 項和	$2178308=1364F_{17}$	$3524576=1364F_{18}$

玖、評鑑與檢討

數學不同於其他自然學科的研究實驗，需要的是探索與思索，探索的過程時常耗費在 *Excel* 數字群中觀察與探究規律，而代數符號取代數字加以運用，才能得到一般性的規則，掌握代數運算更是今後應當多下工夫的地方。我在研究過程中遇到了許多問題，而我將研究過程中的問題附在以下，希望讀者了解。

工作進度表	問題與解決辦法
1. 擬訂題目	問題：題目不知往哪個方向，我不太希望題目的內容超越了國小的範圍。 解決方法：上網查詢每屆的獨立研究徵選的得獎作品
2. 研究目的	問題：費波那契數列的題目範圍太大，需選擇針對一個規律去做探討。 解決方法：後來在查詢資料時，我對 $F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots\ldots+F_{n+9}=F_{n+6}\times11$ 非常有興趣，所以就把研究目的放在此規律上。
3. 開始研究	問題：需用許多代數，對小學生來說較不容易閱讀。 解決方法：將證明以用數字來理解。
4. 結論	問題：研究的結論需要整理，並且理出順序。 解決方法：將整個研究結果加以解釋並且統整出來。
5. 完成摘要	問題：不知如何表達。 解決方法：將整個研究完整的敘述一遍。

希望之後這些問題有更好的解決方法，讓研究完整，內容更清楚明瞭。

壹拾、參考資料

1.*Mario Livio*（2004）。**黃金比例：1.61803......的祕密**。臺北市：遠流。

2.維基百科 ─ 費波那契數列

http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E7%AD%89%E8%A7%92%E8%9E%BA%E7%B7%9A&variant=zh-tw

3.*Fibonacci Numbers and how they are related to flowers, pine cones, pineapples, palm trees, suspension bridges, spider webs, dripping taps, CDs, your savings account, and quite a few other things*.(2000, *October* 26).

From http://www.branta.connectfree.co.uk/fibonacci.htm

4.*Matt Anderson*, & *Jeffrey Frazier*, & *Kris Popendorf*.(1999). *The Fibonacci Series_Applications_Nature.*

*Form http://library.thinkquest.org/*27890/*applications*5.*html*