

目 錄

壹、摘要	01
貳、選擇主題	01
參、擬定工作進度表	01
肆、擬定初步的研究問題.....	02
伍、尋找資源.....	02
陸、記錄研究的發現	03
柒、擬定正試計畫及研究問題	05
捌、提出研究成果	
(一)、進一步觀察規律性.....	05
(二)、頂點的可能組合方式.....	08
(三)、進一步研究	
1、頂點組合 VS 九宮格	12
2、三角填數法	12
3、規則性的頂點填數方式	15
4、等差數與填數規則	19
(四)、結論	22
玖、評鑑與檢討	22
拾、參考資料	23

格格不入—探討正三角形填數字遊戲

壹、摘要

正三角形填數字遊戲，要在 9 個空格內填入 1~9 不同的數字，且使每邊的和都一樣。這是一個看似簡單卻又變化無窮的數學遊戲。我們希望從看似平凡無奇的數學遊戲中找出規律。

我們利用總和必是 45，且三邊和均相同，推測出三頂點總和必為 3 的倍數，進而列出三頂點所有可能的組合。再以數學方法討論，求出各種可能的解。從初步結論中，我們觀察出「可以填入數字遊戲成功的頂點組合」的「九宮格」原則。進而由頂點與九宮格連線的探討，發展出三角填數法。而從研究中我們還發現了這類型的填數字圖原來存在著「等差數」的規律。

我們的研究是個起點，這提供將來進一步研究四邊形，正多邊形填數字遊戲的一個解決方法。

貳、選擇主題

我喜歡「填數字」遊戲。一枝筆，一張紙，總是可以讓我像福爾摩斯辦案一般，抽絲剝繭許久。每當找出正確的答案時，我總是覺得非常興奮。以前，最常玩的填數字遊戲是數獨，因為在報章上常常隨手可得，9 個 3 乘 3 的小方格都要包含從 1~9 的數字，很簡單的規則，卻隱藏著深奧的玄機。最近在數學的書籍裡，看到許多正多邊形的填數字遊戲，例如：正三角形每邊有 4 個空格(2 個在頂點上)，填入 1~9 的數字使每邊的和都一樣，除了填數字還須注意數字的總和。有時候湊一湊就剛好做對了，有時候卻試了好久都做不出來。我們想要知道這種填數字遊戲會不會有什麼訣竅或規律，於是展開了這次的研究之旅。

參、擬定工作進度表

為了進行研究，自 101 學年度 9 月開學，學校開設了獨立研究課程。我選擇了數學領域，依據課程內容擬定工作進度表(如表一)，並依進度表進行相關研究。

表一、工作進度表

月份	101年9月	101年10月	101年11月	101年12月	102年1月	102年2月	102年3月	102年4月	102年5月	102年6月	102年7月	102年8月	102年9月	102年10月	102年11月
1.資料收集	█														
2.認識研究的方法		█													
3.與指導老師討論研究方向	█														
4.確立研究主題				█											
5.擬定研究計畫						█									
6.研究資料的蒐集與閱讀							█								
7.研究的進行與持續性的資料蒐集							█								
8.整理與分析研究資料											█				
9.撰寫研究報告														█	

肆、擬訂初步的研究問題

探討正三角形每邊(含頂點)有 4 格時有幾種填法(答案)。

伍、尋找資源

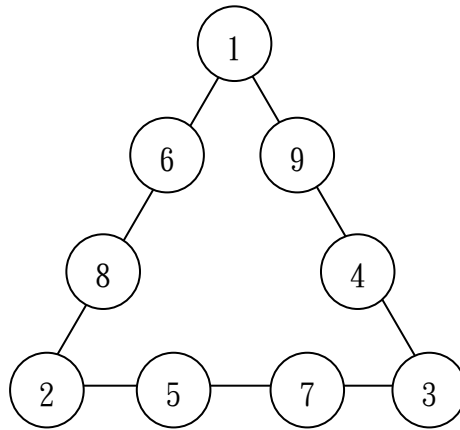
我們從歷屆科展作品中找到一些相關「填數字」的數學作品和數學競試試題並加以研究分析。

- 1、第37 屆全國科展數學科國小組-奇怪的數學遊戲(民86，李奎範、俞曉玫、陳筱君、邱莞庭)這是一個每邊有三個數字的菱形，且每邊的總和相等的研究。將數字1到8不重覆的填入。作者的結論提到「四個頂點和是4的倍數」。
- 2、第46 屆全國科展數學科國小組數字排排看-正魔多邊形的尋找(民95，李軍、陳筱琪、樂美筠)作者在正三角形的部分，探討的是1到6的數字填入法。他們以「試誤法」和電腦輔助計算來尋求多組解。
- 3、探討第48屆全國科展數學科國小組數字-正三角形填數字平衡遊戲(民97，鄭孟州)在1到9不重覆正三角形填數字平衡遊戲中，作者詳列了共有18種不同的解答。並觀察到左右對稱性。
- 4、這些研究大多以嘗試錯誤的方法填入數字，並觀察其結果。而且有些僅6個數字，而我們希望以「正三角形，每邊4格，共9格」的填樹遊戲作為研究對象。

陸、記錄研究的發現

(一)、三角形填數遊戲的遊戲規則：

正三角形每邊(含頂點)有 4 格，一共 9 個空格；將數字 1 到 9 填入空格中，使三角形每邊和都相等(如下圖)。



(二)、觀察和發現

1、頂點數：因為 1 到 9 的和是 45，若設三個頂點和為 x ，則每邊和為 $(45+x) \div 3 = 15 + x/3$ 所以頂點的和 x 必為 3 的倍數。又因為三個頂點數相異， x 的最小可能是 $1+2+3=6$ ，最大可能為 $7+8+9=24$ ，所以 x 只可能為 6、9、12、15、18、21、24；而對應的三角形每邊和依序為 $(45+x) \div 3 = 17、18、19、20、21、22、23$ 。

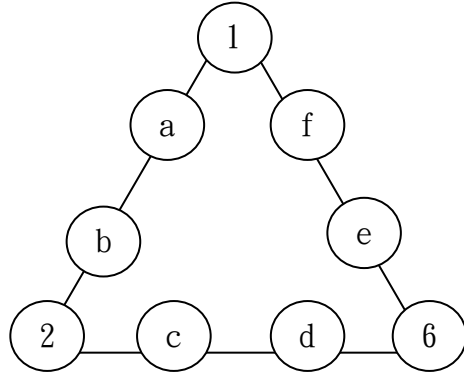
2、頂點的可能組合方式：當 $x=6$ 時，三個頂點數加起來要等於 6，只有一種可能，就是 $1+2+3$ ；三個頂點分別為 1，2，3。當 $x=9$ 時，頂點的組合方式變多了，因為 $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$ 。我們對每一個可能的頂點和 x ，列出所有可能的頂點組合方式，紀錄於(表二)。

表二、三角形頂點的組合方式及每邊和

頂點和 X	頂點組合	每邊和	頂點和 X	頂點組合	每邊和
6	1+2+3	17	15	2+5+8	20
9	1+2+6	18	15	4+5+6	20
9	1+3+5	18	15	2+4+9	20
9	2+3+4	18	15	2+6+7	20
12	1+2+9	19	18	1+8+9	21
12	1+5+6	19	18	3+7+8	21
12	3+4+5	19	18	5+6+7	21
12	1+3+8	19	18	2+7+9	21
12	2+3+7	19	18	4+5+9	21
12	1+4+7	19	18	3+6+9	21
12	2+4+6	19	18	4+6+8	12
15	1+5+9	20	21	5+7+9	22
15	2+4+9	20	21	6+7+8	22
15	3+5+7	20	24	7+8+9	23
15	1+6+8	20			

3、決定了三角形的三個頂點後，接著我們試著填完其它 6 個空格。我們發現，不是所有的頂點可能組合方式都能順利完成填數遊戲。例如：當三個頂點為

1, 2, 6 時，頂點和 $x=9$ ，所以三角形每邊和應為 18。因此， $a+b=15$, $c+d=10$, $e+f=11$ 。但是 1 到 9 扣除 1, 2, 6 三個數字剩下 3, 4, 5, 7, 8, 9 六個數字，得 a, b 一定是 7 和 8，剩下來的 3, 4, 5, 9 四個數字任兩數的和都不會等於 10，也就是找不到 c 跟 d 。



4、表二，只是決定了三角形可能的三個頂點，我們仍須做其他 6 空格的探討。

因為並不是所有的組合都能滿足題目的要求。如何將其他數字順利填入這 6 個空格，這激起了我們更大的好奇心。

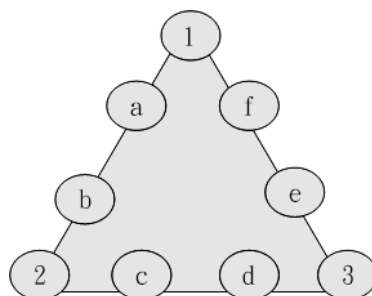
柒、擬定正式計畫及研究問題

- 1、運用數學邏輯分析在三角形頂點數字確認時，各邊空格填法的可能性。
- 2、運用頂點組合與九宮格連線交叉研究可能的規則。

捌、提出研究成果

(一)、在有了初步對頂點的填法認識後，先從頂點和 6, 9, 12 這幾組中觀察其規律性。

- 1、頂點和 $X=6$ ，每邊和=17 得三頂點各為 1, 2, 3 (一種組合)



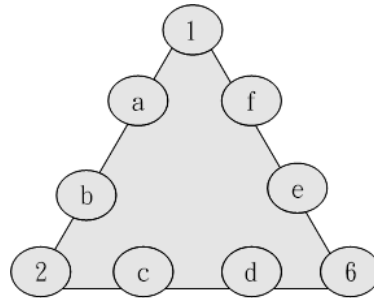
$a+b=14$ ，且 $c+d=12$ ，且 $e+f=13$ ，且 a, b, c, d, e, f 為 4~9 不同的整數

得兩組解： $(a, b, c, d, e, f) = (5, 9, 4, 8, 6, 7)$ 與 $(6, 8, 5, 7, 4, 9)$

2、頂點和 $X=9$ ，每邊和=18

得三頂點各為 $(1, 2, 6)$ ， $(1, 3, 5)$ ， $(2, 3, 4)$ (三種組合)

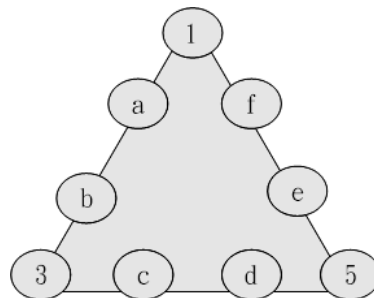
(1) 三頂點為 1, 2, 6



$a+b=15$ ，且 $c+d=10$ ，且 $e+f=11$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

此時 $(a, b, c, d, e, f) =$ 無解

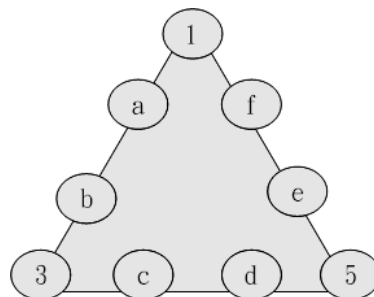
(2) 三頂點為 1, 3, 5



$a+b=14$ ，且 $c+d=10$ ，且 $e+f=12$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

此時 $(a, b, c, d, e, f) =$ 無解

(3) 三頂點為 2, 3, 4



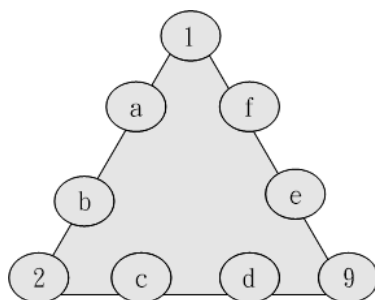
$a+b=13$ ，且 $c+d=11$ ，且 $e+f=12$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$

此時 $(a, b, c, d, e, f) =$ 無解

3、頂點和 $X=12$ ，每邊和=19

得三頂點各為 $(1, 2, 9)$ ， $(1, 3, 8)$ ， $(1, 4, 7)$ (三種組合)

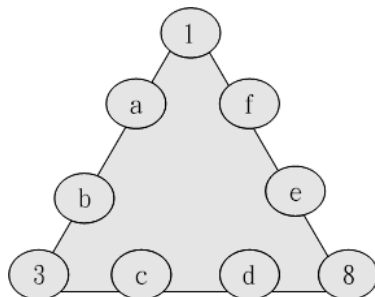
(1) 三頂點為 $1, 2, 9$



$a+b=16$ ，且 $c+d=8$ ，且 $e+f=9$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

此時 $(a, b, c, d, e, f) = \text{無解}$

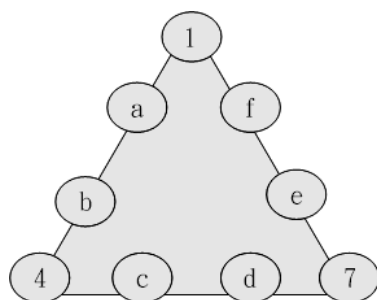
(2) 三頂點為 $1, 3, 8$



$a+b=15$ ，且 $c+d=8$ ，且 $e+f=10$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$

此時 $(a, b, c, d, e, f) = \text{無解}$

(3) 三頂點為 $1, 4, 7$



$a+b=14$ ，且 $c+d=8$ ，且 $e+f=11$ ，且 $a, b, c, d, e, f \in \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

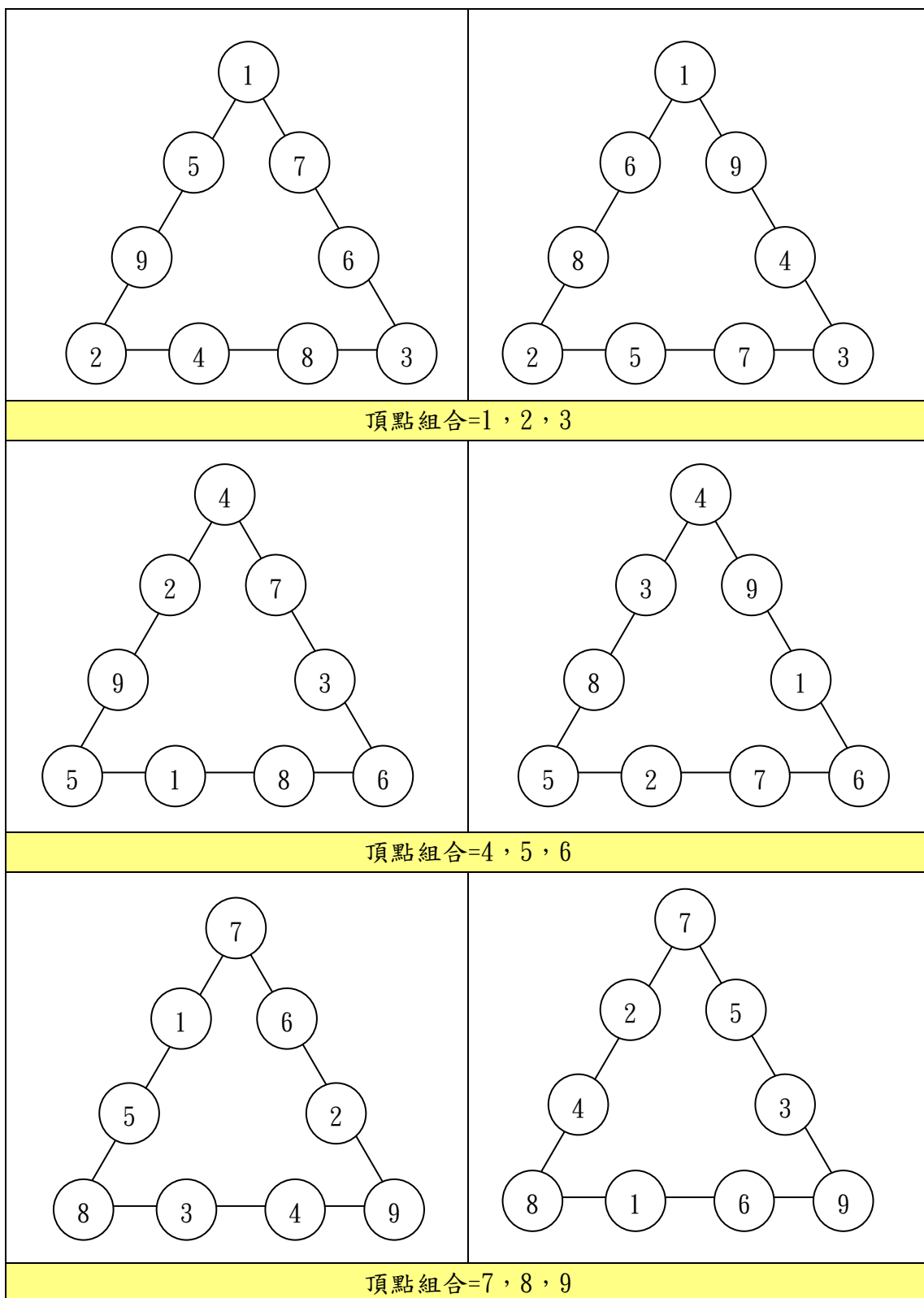
此時 $(a, b, c, d, e, f) = (5, 9, 2, 6, 8, 3)$ 與 $(6, 8, 3, 5, 9, 2)$

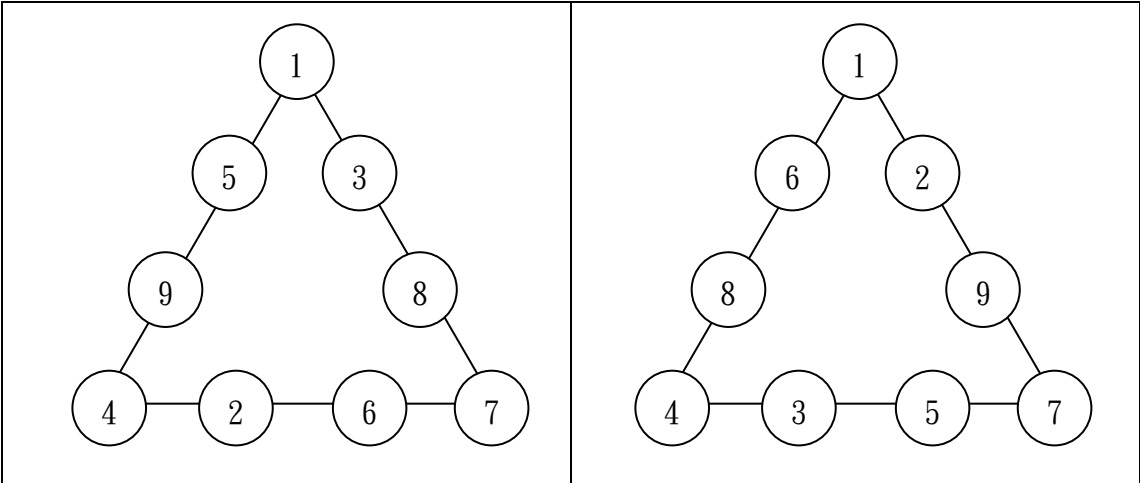
(二)、依照上述的方法與討論，我們得到了以下的結果，發現只有 10 種頂點組合方式能完成填數遊戲，我們把結果記錄於表三。

表三、頂點的可能組合方式/可否完成填數遊戲

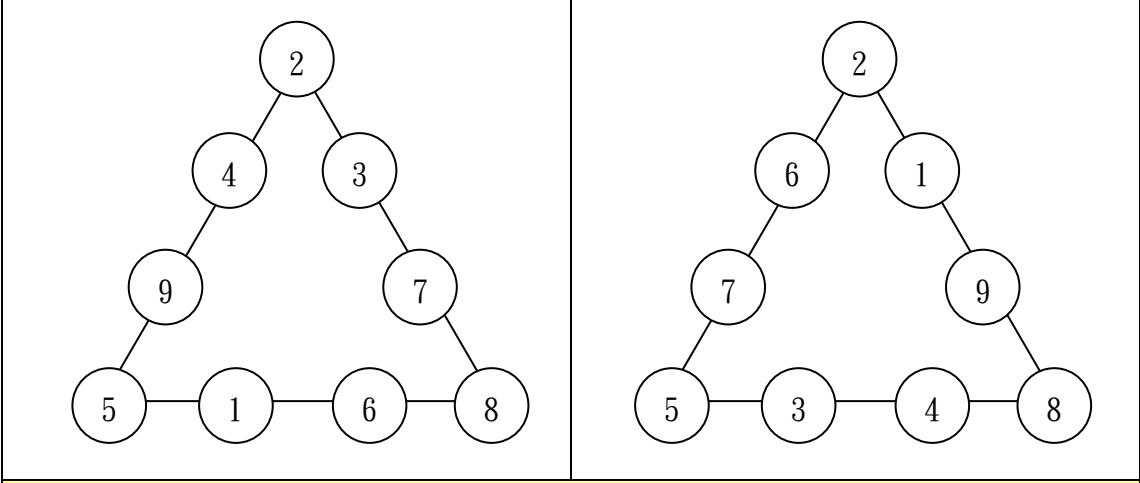
每邊和	頂點和	頂點的可能組合方式/可否完成填數遊戲					
17	6	1+2+3	可				
18	9	1+2+6	否	1+3+5	否	2+3+4	否
19	12	1+2+9	否	1+3+8	否	1+4+7	可
		1+5+6	否	2+3+7	可	2+4+6	否
		3+4+5					
20	15	1+5+9	可	1+6+8	否	2+4+9	否
		2+4+9	否	2+5+8	可	2+6+7	否
		3+5+7	可	4+5+6	可		
21	18	1+8+9	否	2+7+9	否	3+6+9	可
		3+7+8	可	4+5+9	否	4+6+8	否
		5+6+7	否				
22	21	5+7+9	否	6+7+8	否		
23	24	7+8+9	可				

實際將數字填入如下：

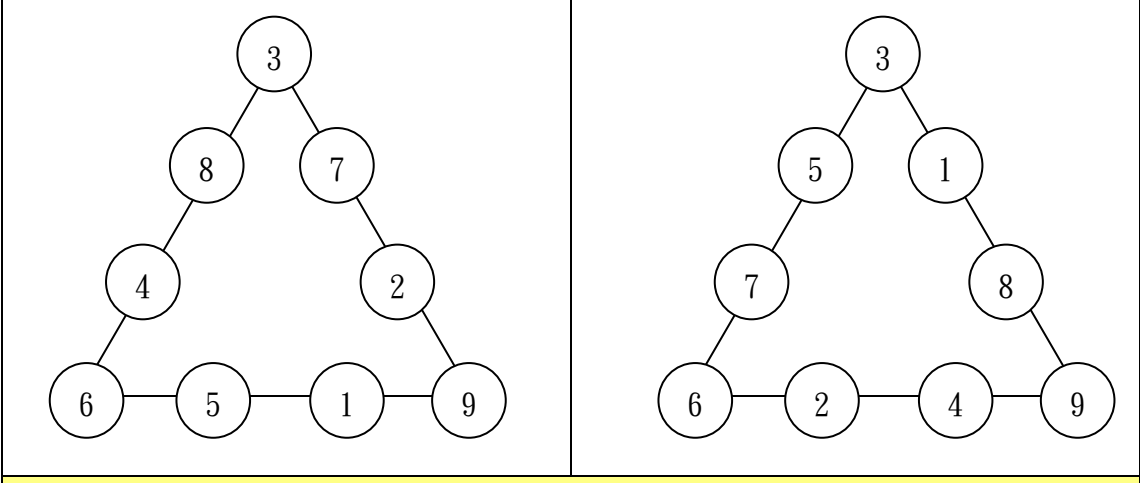




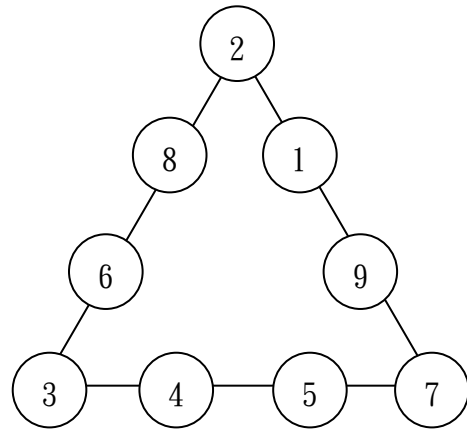
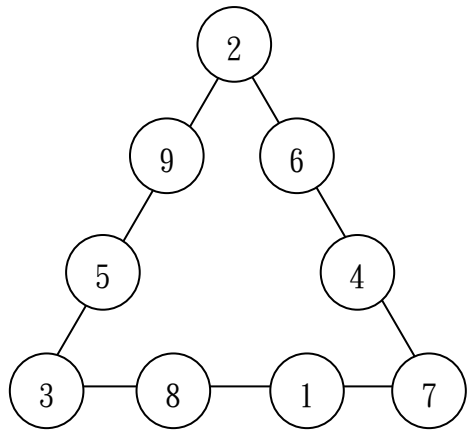
頂點組合=1, 4, 7



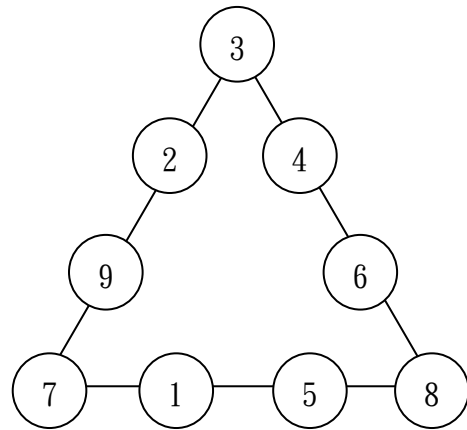
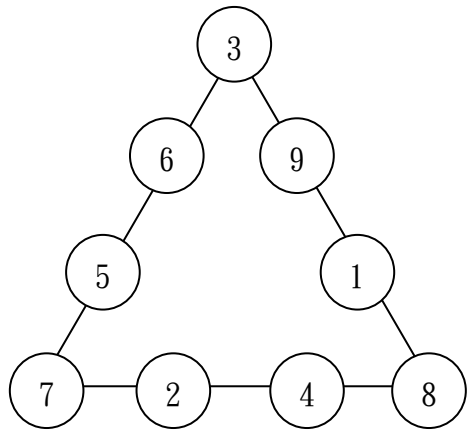
頂點組合=2, 5, 8



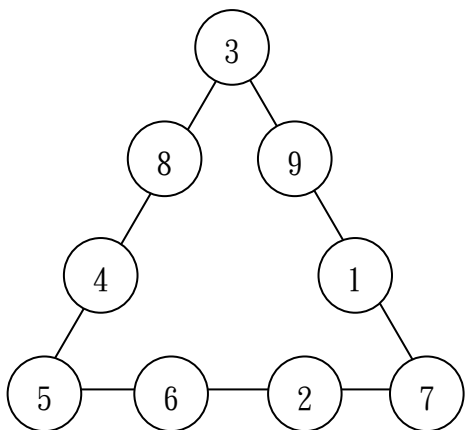
頂點組合=3, 6, 9



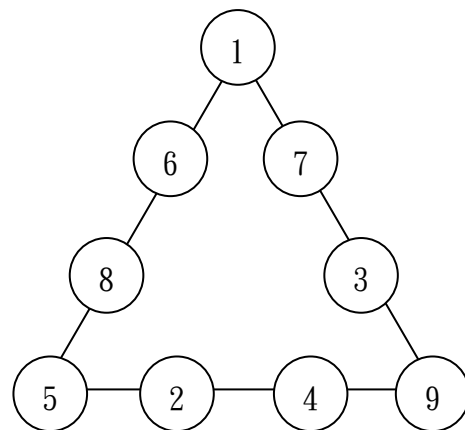
頂點組合=2, 3, 7



頂點組合=3, 7, 8



頂點組合=3, 5, 7



頂點組合=1, 5, 9

(三)、進一步研究

1、頂點組合 VS 九宮格

我們想進一步研究這十種頂點組合方式是不是有什麼規則性。於是，畫個九宮格把1到9依序放入，可以看到這十種頂點組合中有八組數在九宮格內形成一直線，只有2, 3, 7和3, 7, 8兩組沒有在同一線上。(九宮格)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

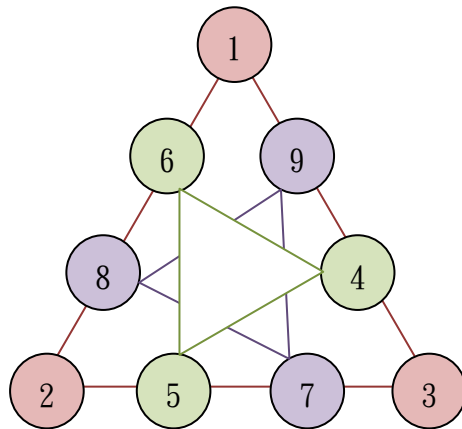
我們將實際數字填入如下

表四：九宮格上的連線

每邊和	頂點和	頂點組合/是否在九宮格成一直線			
17	6	1+2+3 (是)			
19	12	1+4+7 (是)	2+3+7 (否)		
20	15	1+5+9 (是)	2+5+8 (是)	4+5+6 (是)	3+5+7 (是)
21	18	3+7+8 (否)	3+6+9 (是)		
23	24	7+8+9 (是)			

2、三角填數法

雖然所有的填數方式可以逐一列出，不過我們想知道這些成功的填數方式是不是有什麼規則可循，也許這些規則可以用在解決較複雜的四邊形或甚至多邊形填數遊戲問題。以頂點數1, 2, 3為例，這三個數字之間剛好成等差1，我們把1到9的數字按照等差1的規律分成(1, 2, 3)、(4, 5, 6)、(7, 8, 9)三組，發現4, 5, 6三個數剛好位在正三角形的三個不同邊上，7, 8, 9這組也是；把4, 5, 6和7, 8, 9分別連線起來，形成兩個小三角形(如下圖)。



這讓我們想到在玩填數遊戲時，也許可以先根據某些規律把 1 到 9 分成三組，再把各組數字依序填入原來的大三角形和裡面的兩個小三角形頂點空格，我們把這樣的作法叫**三角填數法**。

我們用三角填數的想法來檢查前面 10 種成功的頂點組合(用英文字母 A, B, C ..., J 編號)和對應的填數遊戲完成圖，發現數字 1 到 9 的分組方式如下(見表五)。

把同一組數字用同一種顏色表式，畫在 3x3 的九宮格及其延伸圖上，可以看到明顯的規律性。其中，頂點組合 A、B、C 有一樣的分組方式：

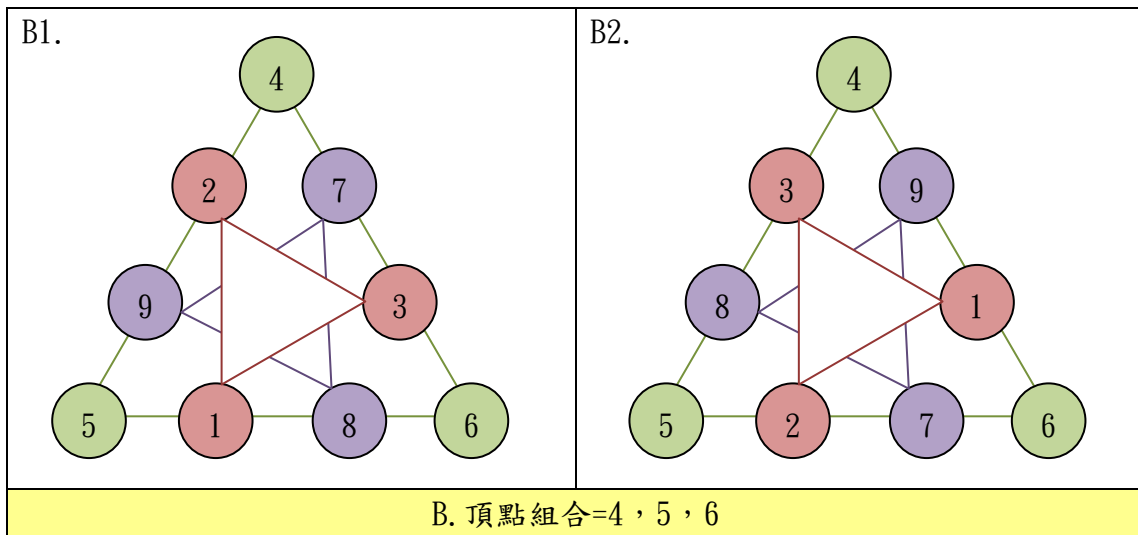
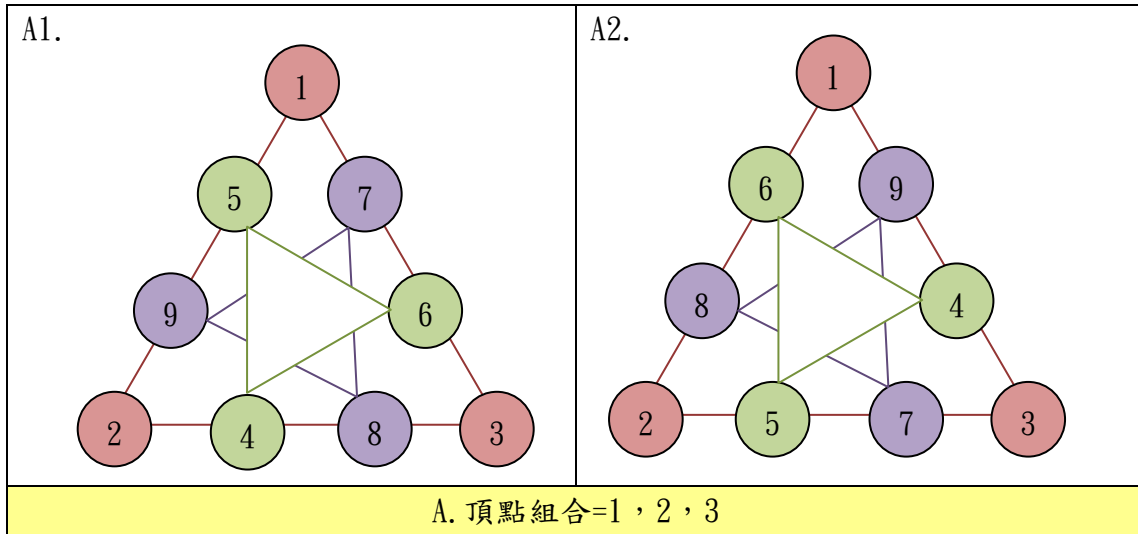
同組數字都成等差 1，位在九宮格的同一列上；頂點組合 D、E、F 也有一樣的分組方式：同組數字成等差 3，位在九宮格的同一行；頂點組合 G、H 的分組方式類似，同組的數字形成左上到右下(G 的情形)或右上到左下(H 的情形)的對角線；頂點組合 I、J 的分組類似，**三組數畫在九宮格延伸圖上，看起來像三條長像一樣的貪吃蛇!**

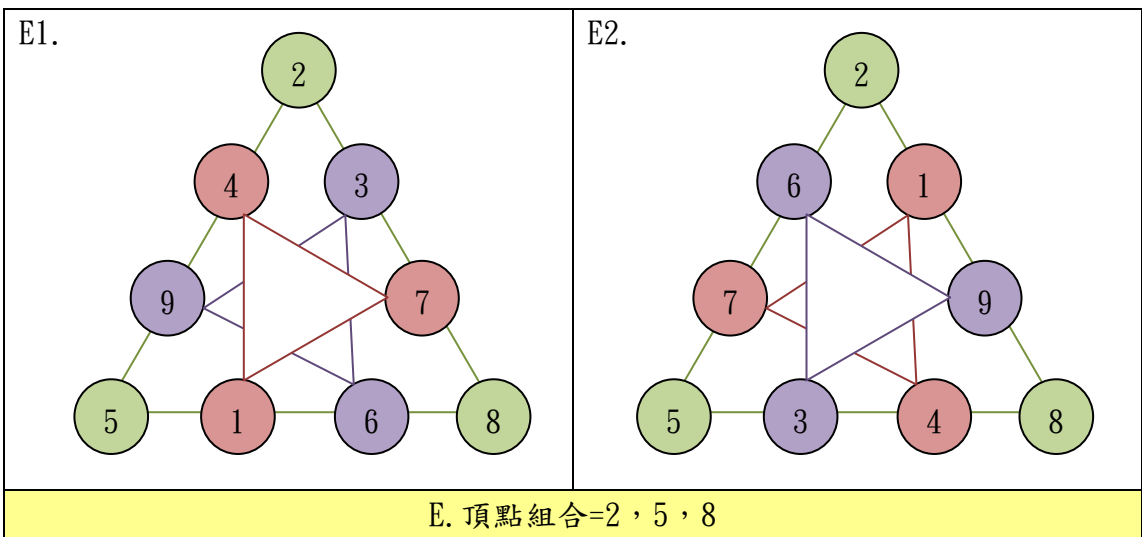
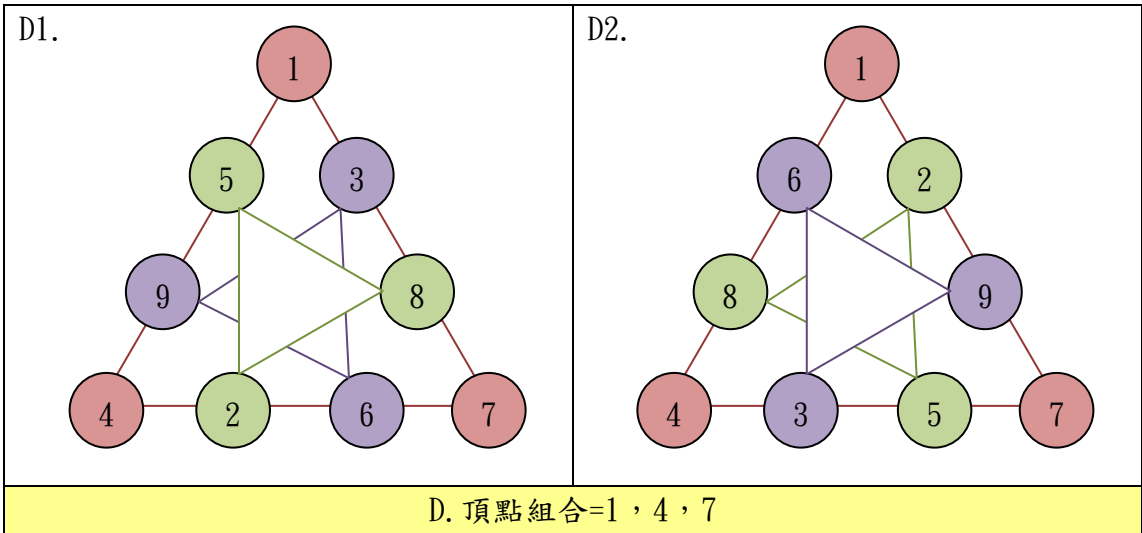
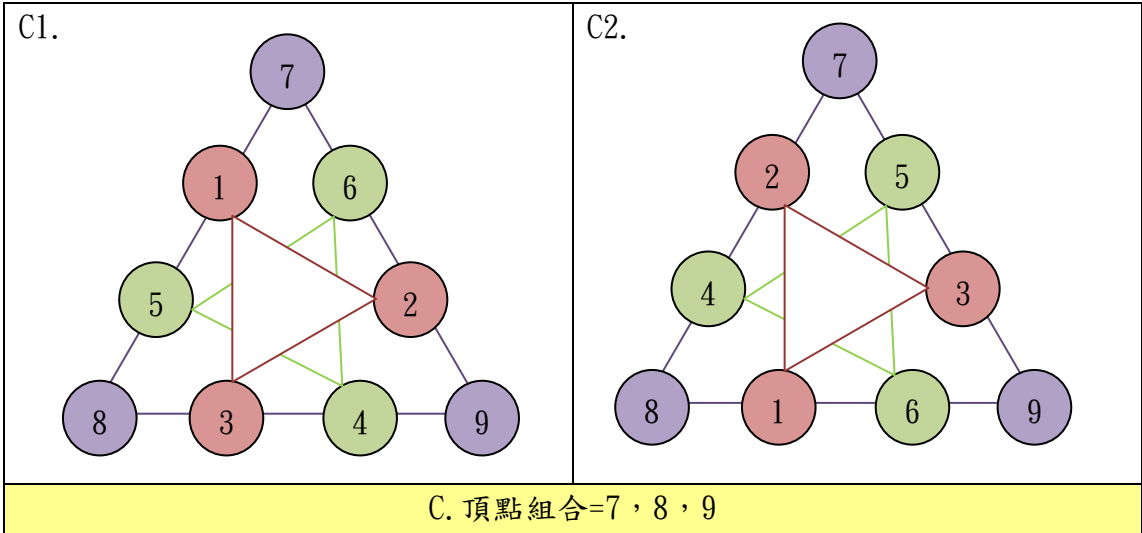
表五

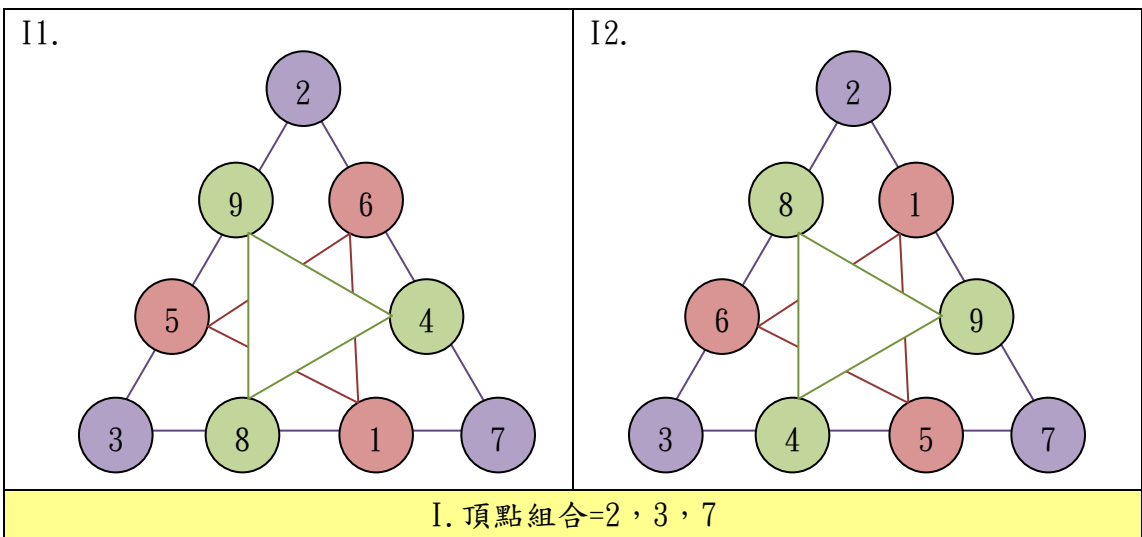
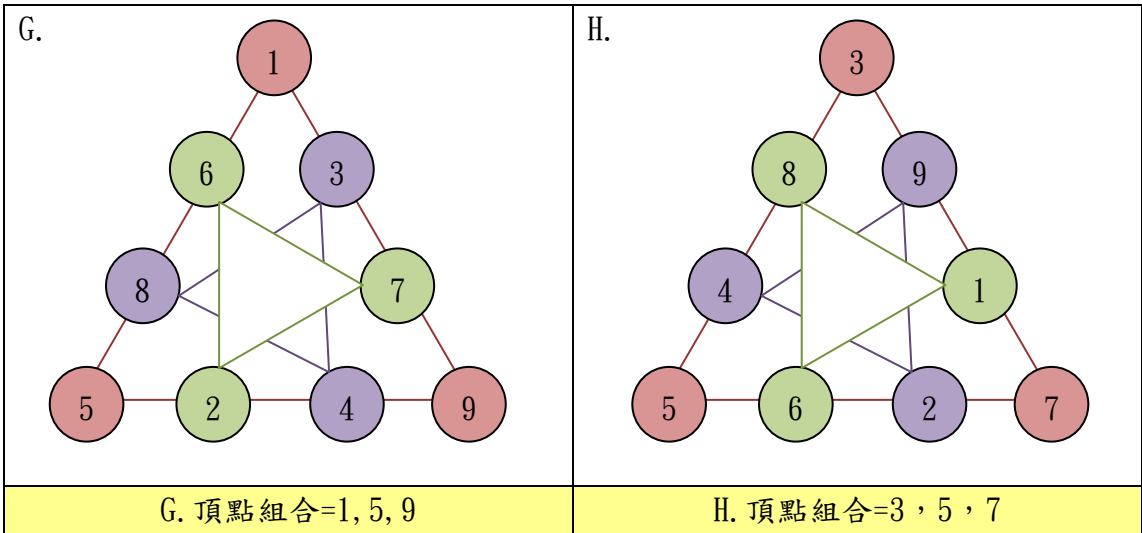
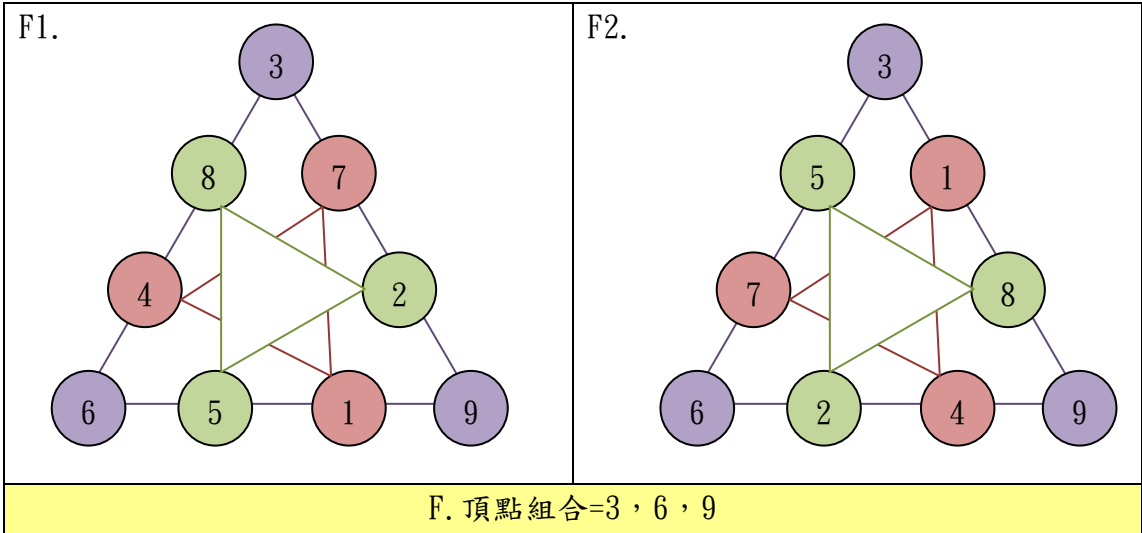
頂點的 三個數	分組方式																					
A. 1+2+3	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				
B. 4+5+6	4, 5, 6	1, 2, 3	7, 8, 9																			
C. 7+8+9	7, 8, 9	1, 2, 3	4, 5, 6																			
D. 1+4+7	1, 4, 7	2, 5, 8	3, 6, 9	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				
E. 2+5+8	2, 5, 8	1, 4, 7	3, 6, 9																			
F. 3+6+9	3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8																			
G. 1+5+9	1, 5, 9	2, 6, 7	3, 4, 8	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	1	2	3	4	5	6	4	5	6	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3																	
4	5	6	4	5	6																	
7	8	9	7	8	9																	
H. 3+5+7	3, 5, 7	1, 6, 8	2, 4, 9	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	1	2	3	4	5	6	4	5	6	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3																	
4	5	6	4	5	6																	
7	8	9	7	8	9																	
I. 2+3+7	2, 3, 7	1, 5, 6	4, 8, 9	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				
J. 3+7+8	3, 7, 8	1, 2, 6	4, 5, 9	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				
1	2	3																				
4	5	6																				
7	8	9																				

3、規則性的頂點填數方式

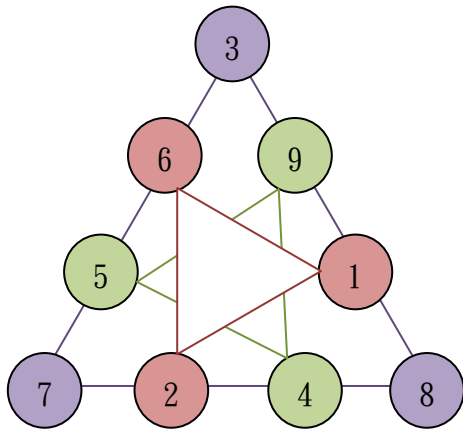
把九個數字分成三組，選定一組數當頂點後，還剩下兩組六個數字。接下來要從這六個數字中選不同組的數字作兩兩配對，分別填入三角形的三個邊上，以便完成填數遊戲，這個步驟有沒有什麼規律性？我們先看看以下這幾種填數法的組合。



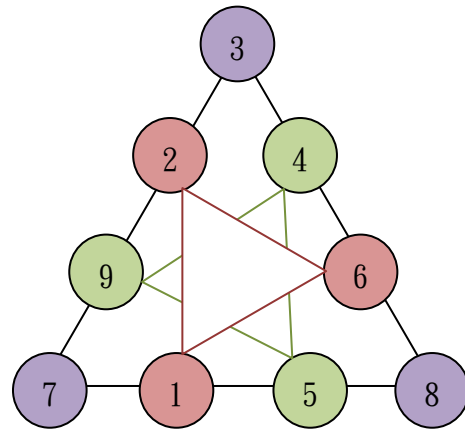




J1.

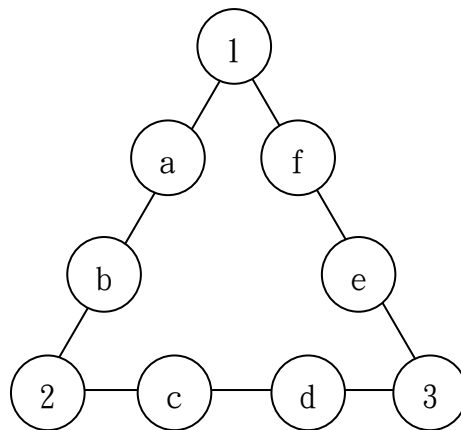


J2.



J. 頂點組合=3, 7, 8

我們觀察所有成功的填數圖，發現到一個有趣的現象。以分組 (1, 2, 3) (4, 5, 6) (7, 8, 9) 為例，如果我們選定第一組數(1, 2, 3)為頂點，則頂點和 $x=6$ ，所以三角形每邊和應為 $(45+6)/3=17$ ，也就是說 $a+b=14$ ， $c+d=12$ ， $e+f=13$ 。所以等一等從 4, 5, 6, 7, 8, 9 這六個數字作兩兩配對時，配對在一起的數字和應分別為 12, 13, 14。



現在看剩下的兩組數，由小到大排好，即(4, 5, 6)、(7, 8, 9)，將它們填入表格內：

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	4	5	6
第 3 組	7	8	9

從直行看下來， $4+7=11$ ， $5+8=13$ ， $6+9=15$ ，這不是我們要的正確配對。

但是如果把第 2 組的每個數往左順移 1 位(=往右順移 2 位，即 4 移到第 3 行，5 移到第 1 行，6 移到第 2 行)：

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	5	6	4
第 3 組	7	8	9
總 和	12	14	13

配對成功! 也就是 $a+b=6+8$ ， $c+d=5+7$ ， $e+f=4+9$ ，對應的正是 A2 的填數圖。

類似的情形，我們可以考慮把第 3 組的每個數往左順移 1 位(=往右順移 2 位，即 7 移到第 3 行，8 移到第 1 行，9 移到第 2 行)：

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	4	5	6
第 3 組	8	9	7
總 和	12	14	13

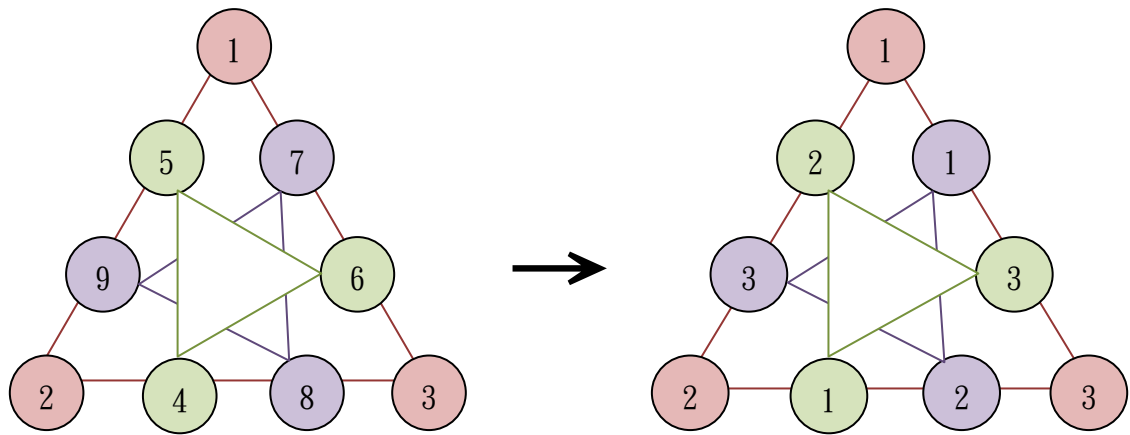
配對成功! 這一次 $a+b=5+9$ ， $c+d=4+8$ ， $e+f=6+7$ ，得到的填數圖是 A1。

逐一檢查所有的分組方式，我們發現所有的填數圖都可以由這個往左順移 1 位的方法來完成。因為可以對第二組數或第三組數作順移，每一種分組方式給了兩個填圖遊戲的可能答案。比較特別的是，在頂點=(1, 5, 9) 和頂點=(3, 5, 7) 兩種情形(圖 G 和圖 H)，得到的兩個答案中只有一個是配對正確的；其它的頂點分組方式沒有這個問題，兩個都是正確答案。

4. 等差數與填數規則

上面的填數字規則到底是巧合，還是有什麼道理藏在後面？頂點=(1, 5, 9)和頂點=(3, 5, 7)兩種情形為什麼和別人不同？因為分組方式的不同，要一併解釋所有情形似乎不容易，所以我們主要觀察前兩類分組方式，也就是同組數字成等差的情形。第一類分組是(1, 2, 3)，(4, 5, 6)，(7, 8, 9)，包含圖 A1, A2, B1, B2, C1, C2 的情形。

以圖 A1 為例，在三角填數法中，同組的三個數字剛好位在三角形的三個頂點或三個不同邊上，如果把同組的數字都減去一個共同值，如 $(4, 5, 6) - (3, 3, 3) = (1, 2, 3)$ ， $(7, 8, 9) - (6, 6, 6) = (1, 2, 3)$ ，得到的新圖形還是一樣滿足填數遊戲三邊和要一樣的規則。所以在這一類分組中，不管頂點選取那一組，我們都可以把問題簡化成 $(1, 2, 3)$ ， $(1, 2, 3)$ ， $(1, 2, 3)$ 三組數字的填數遊戲，這時三角形的每邊和應為 $(1+2+3) \times 4/3 = 8$ ，也就是數字 1, 2 為頂點的邊須填入和為 5 的兩數；數字 1, 3 為頂點的邊須填入和為 4 的兩數；數字 2, 3 為頂點的邊須填入和為 3 的兩數。



(以圖 A1 為例)

原來順序：

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	1	2	3
第 3 組	1	2	3

第 2 組左移 1 位後，符合所求！

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	2	3	1
第 3 組	1	2	3
總和	3	5	4

第 3 組左移 1 位後，符合所求！

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	1	2	3
第 3 組	2	3	1
總和	3	5	4

第二類分組是(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), 包含圖 D1, D2, E1, E2, F1, F2 的情形。因為(2, 5, 8)-(1, 1, 1)=(1, 4, 7), (3, 6, 9)-(2, 2, 2)=(1, 4, 7), 和第一類分組同樣的道理, 我們可以把問題簡化成(1, 4, 7), (1, 4, 7), (1, 4, 7)三組數字的填數遊戲, 這時三角形的每邊和應為(1+4+7) × 4/3=16, 也就是數字 1, 4 為頂點的邊須填入和為 11 的兩數; 數字 4, 7 為頂點的邊須填入和為 5 的兩數; 數字 1, 7 為頂點的邊須填入和為 8 的兩數。

原來順序:

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	1	4	7
第 3 組	1	4	7

第 2 組左移 1 位後，符合所求！

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	4	7	1
第 3 組	1	4	7
總和	5	11	8

第 3 組左移 1 位後，符合所求！

	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 2 組	1	4	7
第 3 組	4	7	1
總和	3	5	4

以等差的觀點看，剩下的圖 G、H、I、J 分組方式規律性較差些。以圖 I 為例，對應的分組方式是(2, 3, 7), (1, 5, 6), (4, 8, 9)，第一組數(2, 3, 7)為頂點，但是不像之前的例子，我們無法透過同加或同減一數把(2, 3, 7)化成第二組數(1, 5, 6)或第三組數(4, 8, 9)；不過 $(4, 8, 9) - (3, 3, 3) = (1, 5, 6)$ ，所以我們可以把這個填數遊戲稍為簡化成(2, 3, 7), (1, 5, 6), (1, 5, 6)的填數字遊戲，既然第二組和第三組數字一樣，當然以第二組數作往左順移一位或第三組數作往左順移一位都應該得到正確答案，所以有兩組解。圖 J 的情形也類似。

最後剩下的 G、H 兩種分組方式，我們無法以類似的辦法化簡，這也是我們看到的特殊例子：兩種順移方式只有一種給出正確答案的情形。

(四)、結論

1. 將數字 1 到 9 的數字填入正三角形每邊(含頂點)有 4 格，一共 9 個空格，且使每邊和都相等。我們利用總和必是 45，且三邊和均相同，推測出三頂點總和必為 3 的倍數，進而列出三頂點所有可能的組合。
2. 在確立三頂點後，我們再以數學方法討論，求出各種可能的解。這是我們解決填數字遊戲的第一種作法。
3. 從第一種作法的結論中，我們觀察出「可以填入數字遊戲成功的頂點組合」幾乎都在「九宮格內」成一直線。(捌、研究成果 (三) 1. 頂點組合 VS 九宮格)
4. 我們由頂點與九宮格連線的探討，發展出填數字遊戲的第二種作法：先根據某些規律把 1 到 9 分成三組，再把各組數字依序填入原來的大三角形和裡面的兩個小三角形頂點空格，我們把這樣的作法叫三角填數法。(捌、研究成果 (三) 2. 三角填數法)
5. 從第二種做法的討論，我們還發現了所有的填數圖都可以由這個往左順移 1 位的方法來完成！進而發現了這原來存在著「等差數」的規律。

玖、評鑑與檢討

1. 我們知道正三角形填數字法，在過去有一些小學科展作品有提到相關討論，我們很高興經由我們的研究，可以運用「九宮格法」，「三角填數法」「等差數的規律」讓這些解答能更精確地被找出來。這是我們最重要的發現。
2. 研究中，我們遇到最大的困難是相關資料的不足，大部分找到的資料只是提供「題目」或「解答」，並未告訴我們如何尋求答案。
3. 透過這個研究和老師的指導，我們學習到如何在生活中找尋問題，如何運用網路和圖書館資源找到知識和答案。在一年的學習中，我們整理如麻的資料，完成作品。這樣的學習過程很辛苦但很充實。
4. 我們從喜歡數學，玩數字遊戲，進而想了解這個數學遊戲的奧秘。最後找到解決問題的方法。
5. 從一開始的「土法煉鋼」拼湊答案，進而尋找到數學的規律，讓我們有信心能將這個成果繼續研究下去，未來希望能找出正四邊形，正多邊形填數字法的規律。

拾、參考資料

- 1、第37屆全國科展數學科國小組-奇怪的數學遊戲(民86，李奎範、俞曉玫、陳筱君、邱莞庭)。
- 2、第46屆全國科展數學科國小組數字排排看-正魔多邊形的尋找(民95，李軍、陳筱琪、樂美筠)。
- 3、探討第48屆全國科展數學科國小組數字-正三角形填數字平衡遊戲(民97，鄭孟州)。