彰化縣 102 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：(由承辦單位編列)

組別：

☐國小高年級組（四、五、六年級）

■國中組

■數學類

☐自然與生活科技類

☐人文社會類

作品名稱：等差相繼數之研究與推廣

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予評審並退件。

彰化縣102學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（內文）

第一階段 研究訓練階段（由教師撰寫）

一、　　近二年學校獨立研究課程之規劃

「獨立研究」旨在於使資優學生能夠利用現今的資訊、設備或書籍等工具，探討相關文獻，就文獻中之優缺點加以評析，然後決定自己將探討的問題；參考已有之資料，設計實驗方法，推測可能之結果，將已有或文獻之結果，以統計方法（包括電腦運用）分析之；以書面或口頭方式，將重要結果發表。本校曾延請教授蒞校進行獨立研究的講座，鼓勵學生嘗試參與研究，並於輔導室備有近年彰化縣獨立研究得獎成果冊供師生參閱。本校獨立研究課程計畫表如下：

<table>
<tr><td>課程
名稱</td><td>獨立研究</td><td>年級</td><td>七、八</td><td>總節數</td><td>資優班
（一週3節）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">課程
內涵</td><td colspan="3">個別或小組探討實際問題</td><td rowspan="2">授課
教師</td><td rowspan="2">資優班教師</td></tr>
<tr><td colspan="3">經由各領域課程的探究，七年級時讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，進行研究。八年級時將更加強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力。</td></tr>
<tr><td colspan="3">主題課程目標（次目標）</td><td colspan="3">教學調整</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.從事個人或小組研究，增進問題解決能力。
2.學習擬定研究計畫及選擇適合的研究方法。
3.學習撰寫一份完整的研究報告。
4.培養主動積極、自我負責的學習態度。</td><td colspan="3">1.除課內時間和學校資源外，視實際狀況和學生需求引入社區資源，以增加研究成果的豐富性及完整度。
2.舉辦獨立研究發表會，教師評、自評及同儕互評並行。</td></tr>
</table>

課程設計(上學期)				
主題	教學重點	評量方式	節數	備註
選定研究主題	1.學生尋找欲研究的主題，並確定研究主題與範圍。 2.撰寫研究動機與目的。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	9 節	
擬定研究計畫	1.與學生討論此研究主題的資料蒐集來源，確認學生對此主題的掌握度。 2.擬定研究計畫，具體說明內容及預定時間，經指導教師和家長確認後執行。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	9 節	
蒐集資料	1.依主題蒐集各式資料，並進行資料的摘要整理。 2.針對資料蒐集的狀況，檢視研究計畫的可行性，必要時須做修改。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	12 節	
執行研究	1.選擇合適的研究方法，依個人研究計畫進行研究。 2.以撰寫研究日誌和影像紀錄的方式，主動紀錄研究歷程並定時檢視進度。 3.教師留意學生研究情況，依實際問題進行修改和調整。	1.口頭發表 7.觀察評量 9.檔案評量	30 節	視學生研究主題結合器材操作及成品製作等評量方式
課程設計(下)				
主題	教學重點	評量方式	節數	備註
研究報告定稿	1.檢視寒假研究進度。 2.整理研究成果，完成個人獨立研究成果書面報告。 3.檢查參考資料及圖文引用的標註。	1.口頭發表 2.書面報告 7.觀察評量 9.檔案評量	15 節	視研究性質和成果完整度參

成果彙整	學習 PDF 電子書製作基本技巧。	1.口頭發表。 2.書面報告。 7.觀察評量 9.檔案評量	18 節	加研究類競賽活動
獨立研究發表會	1.製作獨立研究簡報檔或其他發表所需物品。 2.獨立研究發表排練，進行同儕互評與自評。 3.辦理獨立研究成果發表會。	1.口頭發表 6.活動設計 7.觀察評量 9.檔案評量 10.簡報檔	21 節	

本校獨立研究課程目標：

（一）充實資優生智能，發揮潛能。

（二）培養資優生創造力、想像力及批判思考等能力。

（三）培養資優生具有解決問題、研究問題之能力。

（四）培養資優生能適度表達情緒及建立良好之人際關係。

（五)透過小組學習及小組研究,培養資優生和諧的學習氣氛及互助合作之精神。

（六）培養資優生具有全方位之人格發展，以能關懷社會、服務社會。

二、 學校如何提供該生獨立研究訓練

獨立研究不是「學生獨力」的研究，也不是「教師代替」的研究。在教師指導學生的過程裡，由於資優學生對於外在世界及自我興趣的探索不夠，使得學生經常無法決定研究主題；而學生對於研究方法不瞭解，也經常使得學生的研究無法深入。因此「教師的引導」在學生的獨立研究過程中非常地重要。但獨立研究也不是「教師代替」的研究，否則就失去了培養學生探究技能的目的。

依據學生的個別差異，教師引導的方式也應有所不同，目前本校資優班教師皆依以下三點指導學生獨立研究：

（一）學生自我引導的能力

對於高度自我引導能力的學生，教師的角色是「諮詢者」；對於略具自我引導能力的學生，教師的角色是「合作者」；對於缺乏自我引導能力的學生，教師的角色是「引導者」。

（二）學生以往從事研究的經驗

對於已有研究經驗的學生，教師可讓其自主研究；對於以往沒有研究經驗的學生，教師應先提供一般探索的機會，協助學生發現其興趣領域。

（三）學生所具備的研究技能

對於已具有研究技能的學生，教師可鼓勵其多做研究；對於研究技能尚不足的學生，教師需先提供研究技能的訓練。

以下為本校資優班老師在指導學生獨立研究的步驟：

（一）教師引導階段（1 週～1 年）

1. 運用專題講座，提供不足的學科知識。
2. 運用資源教室的充實活動，提供一般探索機會。
3. 協助學生找出感興趣的研究領域，隨時記下可研究的題目。
4. 提供研究能力訓練，如：圖書館運用、觀察的能力、做筆記的能力、晤談方法與運用電腦的能力的訓練。

（二）獨立研究階段（5 週～15 週）

1. 選擇主題
2. 擬定工作進度表
3. 擬定初步的研究問題
4. 尋找資源
5. 紀錄研究的發現
6. 擬定正式的計畫的研究問題

7. 進行師生討論會

8. 提出研究成果

9. 評鑑

（三）專題討論階段（1 週～5 週）

1. 提供過程研討的機會

2. 提供特定主題的研討

3. 計畫新的研究

第二階段　獨立研究階段（由學生撰寫）

一、　　摘要

本研究針對「**等差相繼數**」的主題進行探討。本文探討的等差相繼數定義為可用正整數所組成的等差級數之和來表示的數。

主要研究問題為二：（一）滿足等差相繼數的規律與條件為何？（二）哪些數不是等差相繼數？研究結果發現：（一）1. 等差相繼數的規律可分為兩種形式：①當 n 是奇數或 d 是偶數時，$S_n = nA$，$A \ge 2$。②當 n 是偶數且 d 是奇數時，$S_n = n\left(B+\frac{1}{2}\right)$，$B \ge 2$。2. 等差相繼數必須滿足$\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2} \ge 1$。（二）1. 除了 1、2、3、4、5、8 及質數以外的正整數，皆為等差相繼數。2. 除了 1 以外的正整數，皆可用「整數」所組成的等差級數之和來表示。

二、　　選擇主題

在二下等差級數單元中，老師向我們介紹了數學家高斯的小故事，他迅速完成了$1+2+3+\cdots+99+100=5050$的計算。我突然對等差級數的和產生好奇，想知道是否所有的正整數都能像 5050 一樣，表示為等差級數之和呢？為了讓主題更明確，我們稱可用正整數所組成的等差級數之和來表示的數為「**等差相繼數**」，並限制討論範圍為：首項需為正整數（$a_1 \in \mathbb{N}$），項數必須大於等於 3（$n \ge 3$），

公差需為正整數（d∈ℕ）。

三、　擬定工作進度表

預定進度甘梯圖	9/2 ≀ 9/15	9/16 ≀ 9/29	9/30 ≀ 10/6	10/7 ≀ 10/13	10/14 ≀ 10/20	10/21 ≀ 10/27	10/28 ≀ 11/3	11/4 ≀ 11/10
擬定研究問題								
尋找資源								
文獻整理與討論								
討論初步研究發現								
深入探討研究問題								
提出研究結果								
匯整研究結果								
進度累計（%）	10	20	35	50	70	80	90	100

四、　擬定初步的研究問題

（一）是否任意正整數皆可表示為由正整數所組成的等差級數之和？且等差級數之項數必須大於等於 3。

（二）等差相繼數（可表為由正整數所組成的等差級數之和的數）有何規律或特性？

五、　尋找資源

在《數學思考》一書中提到所有 2 的乘冪不能被表成連續正整數之和，我們將其結果整理後，證明如下。

證明：

設 2^k 可表為連續正整數之和，首項為 n，共有 m 項（$m\geq 3$），

即$2^k=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m-1)=\dfrac{m(2n+m-1)}{2}$。

$\therefore 2^{k+1}=m(2n+m-1)$

$\because 2^{k+1}$為 2 的連乘積

$\therefore$m 不能為奇數

但若 m 為偶數，則$(2n+m-1)$必為大於 1 的奇數，造成矛盾。

故形如2^k，$k\in\mathbb{N}$的正整數必不能表示為連續正整數之和。

但是在此書中，僅提到連續正整數之和，亦即僅討論等差級數中公差為 1 的情形，我們想更進一步了解當公差為其他正整數時的情形。

因此，我們搜尋了其他文獻，發現在李銘城（2005）的研究中使用演算法及執行程式來說明任何質數均不能表為公差為 2 的正等差級數之和。但其研究也僅限於討論等差級數之公差為 2 的情形，並未討論到當公差為任意正整數。

六、　記錄研究的發現

根據文獻，可回答初步的研究問題（一），我們已知 2 的乘冪不能被表成由正整數所組成的公差為 1 的等差級數之和，以及任何質數均不能表為由正整數所組成的公差為 2 的正等差級數之和。但是文獻中並未提到公差為任意正整數時之情形，因此接下來討論如下。

（一）以列舉法列出幾個不同公差與項數之等差級數和，並觀察其規律。

一開始用列舉法將公差（d）為 1、2、3 的等差數列列出幾項，再計算當項數（n）為 3、4、5、6 之級數和，希望藉此可以觀察出規律，因此用幾個表格列出不同公差、不同項數之等差級數和，如下表。

表 1.1

d=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	規律
n=3			6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	3C

n=4				10	14	18	22	26	30	34	38	42	4C+2
n=5					15	20	25	30	35	40	45	50	5C
n=6						21	27	33	39	45	51	57	6C+3

表 1.2

d=2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	規律
n=3			9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	6C+3
n=4				16	24	32	40	48	56	64	72	80	8C
n=5					25	35	45	55	65	75	85	95	10C+5
n=6						36	48	60	72	84	96	108	12C

表 1.3

d=2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	規律
n=3			12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	6C
n=4				20	28	36	44	52	60	68	76	84	8C+4
n=5					30	40	50	60	70	80	90	100	10C
n=6						42	54	66	78	90	102	114	12C+6

表 1.4

d=3	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	規律
n=3			12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	9C+3
n=4				22	34	46	58	70	82	94	106	118	12C+10
n=5					35	50	65	80	95	110	125	140	15C+5
n=6						51	69	87	105	123	141	159	18C+15

表 1.5

d=3	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	規律
n=3			15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	9C+6
n=4				26	38	50	62	74	86	98	110	122	12C+2

n=5					40	55	70	85	100	115	130	145	15C+10
n=6						57	75	93	111	129	147	165	18C+3

表 1.6

d=3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	規律
n=3			18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	9C
n=4				30	42	54	66	78	90	102	114	126	12C+6
n=5					45	60	75	90	105	120	135	150	15C
n=6						63	81	99	117	135	153	171	18C+9

根據上表發現：

1. 不同公差與不同項數計算出之級數和所形成的新數列有規律。例如當公差為1、項數為 3 時，等差相繼數所形成的新數列之規律為 3 乘以某正整數（形如 3C，C 為一正整數）；當公差為 2、項數為 3 時，等差相繼數所形成的新數列之規律有兩種，一為 6 乘以某正整數（形如 6C，C 為一正整數），二為 6 乘以某正整數再加上 3（形如 6C+3，C 為一正整數）。
2. 將 1. 所發現之規律整理後，發現當公差與項數固定時，計算出來之等差相繼數又可形成新的等差數列，且其新公差為原公差乘以項數（$d\times n$）。例如當公差為 1 時，連續三項之和所形成的新等差數列之新公差為 3（1×3），連續四項之和所形成的新等差數列之新公差為 4（1×4）；當公差為 2 時，連續三項之和所形成的新等差數列之新公差為 6（2×3），連續四項之和所形成的新等差數列之新公差為 8（2×4）。

但公差為 d 的等差數列會有 d 個不同首項，因此會形成 d 種不同數列，若為了求得每種結果，需將 d 種數列列出，並依次相加列出等差相繼數。使用這個方法，雖可藉此看出數字間的規律性，但其並不明顯，且計算過程繁複無法全部列出，故無法確定當公差與項數變大時，其規律是否成立，因此便再尋求其他方法。

（二）將公差與項數代入等差級數和之公式$S_n=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$。

由於上述方法無法列出所有可能，因此接下來，將不同公差與不同項數代入等差級數和之公式$S_n=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$，藉此以看出更明顯的規律，整理如下表。

表 2

	n=3	n=4	n=5	n=6
d=1	$S_n=\dfrac{3(2a_1+2)}{2}=3(a_1+1)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+3)}{2}=4(a_1+1)+2$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+4)}{2}=5(a_1+2)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+5)}{2}=6(a_1+2)+3$
d=2	$S_n=\dfrac{3(2a_1+4)}{2}=3(a_1+2)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+6)}{2}=4(a_1+3)$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+8)}{2}=5(a_1+4)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+10)}{2}=6(a_1+5)$
d=3	$S_n=\dfrac{3(2a_1+6)}{2}=3(a_1+3)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+9)}{2}=4(a_1+4)+2$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+12)}{2}=5(a_1+6)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+15)}{2}=6(a_1+7)+3$
d=4	$S_n=\dfrac{3(2a_1+8)}{2}=3(a_1+4)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+12)}{2}=4(a_1+6)$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+16)}{2}=5(a_1+8)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+20)}{2}=6(a_1+10)$
d=5	$S_n=\dfrac{3(2a_1+10)}{2}=3(a_1+5)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+15)}{2}=4(a_1+7)+2$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+20)}{2}=5(a_1+10)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+25)}{2}=6(a_1+12)+3$
d=6	$S_n=\dfrac{3(2a_1+12)}{2}=3(a_1+6)$	$S_n=\dfrac{4(2a_1+18)}{2}=4(a_1+9)$	$S_n=\dfrac{5(2a_1+24)}{2}=5(a_1+12)$	$S_n=\dfrac{6(2a_1+30)}{2}=6(a_1+15)$

根據上表發現：

1. 當項數為奇數時，公差不同之等差相繼數的形式皆可用項數乘以某正整數（形如$n\times A$，A 為一正整數）來表示。

2. 當項數為偶數時，公差不同之等差相繼數的形式分為兩種：當公差為奇數時，

形式為項數乘以某正整數再加上項數的一半（$n\times B+\frac{n}{2}$，B 為一正整數)；當公差為偶數時，形式為項數乘以某正整數（$n\times A$，A 為一正整數)。

七、 擬定正式計畫及研究問題

由前文中初步研究問題可知：並非所有正整數皆為等差相繼數，亦即任意正整數不一定可表示為由正整數所組成的等差級數之和；此外，若正整數為等差相繼數，是有規律的及固定形式的。

因此，接下來我們擬定正式的研究問題為：

（一）滿足等差相繼數的規律與條件為何？

（二）哪些數不是等差相繼數？

八、 提出研究成果

（一）將等差級數和之公式改寫為$S_n=n\times\left[a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right]$=項數×中間項。

為了進一步討論前文所提到的兩種等差相繼數的形式，因此將公式改寫，整理出以下式子：

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}=n\times\left[\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right]=n\times\left[a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right]$=項數×中間項，

並將不同公差與不同項數代入，整理如下表。

表 3

	n=3	n=4	n=5	n=6
d=1	$S_n=\frac{3(2a_1+2)}{2}$ $=3(a_1+1)$	$S_n=\frac{4(2a_1+3)}{2}$ $=4\left(a_1+\frac{3}{2}\right)$	$S_n=\frac{5(2a_1+4)}{2}$ $=5(a_1+2)$	$S_n=\frac{6(2a_1+5)}{2}$ $=6\left(a_1+\frac{5}{2}\right)$

d=2	$S_n=\frac{3(2a_1+4)}{2}$ $=3(a_1+2)$	$S_n=\frac{4(2a_1+6)}{2}$ $=4(a_1+3)$	$S_n=\frac{5(2a_1+8)}{2}$ $=5(a_1+4)$	$S_n=\frac{6(2a_1+10)}{2}$ $=6(a_1+5)$
d=3	$S_n=\frac{3(2a_1+6)}{2}$ $=3(a_1+3)$	$S_n=\frac{4(2a_1+9)}{2}$ $=4\left(a_1+\frac{9}{2}\right)$	$S_n=\frac{5(2a_1+12)}{2}$ $=5(a_1+6)$	$S_n=\frac{6(2a_1+15)}{2}$ $=6\left(a_1+\frac{15}{2}\right)$
d=4	$S_n=\frac{3(2a_1+8)}{2}$ $=3(a_1+4)$	$S_n=\frac{4(2a_1+12)}{2}$ $=4(a_1+6)$	$S_n=\frac{5(2a_1+16)}{2}$ $=5(a_1+8)$	$S_n=\frac{6(2a_1+20)}{2}$ $=6(a_1+10)$
d=5	$S_n=\frac{3(2a_1+10)}{2}$ $=3(a_1+5)$	$S_n=\frac{4(2a_1+15)}{2}$ $=4\left(a_1+\frac{15}{2}\right)$	$S_n=\frac{5(2a_1+20)}{2}$ $=5(a_1+10)$	$S_n=\frac{6(2a_1+25)}{2}$ $=6\left(a_1+\frac{25}{2}\right)$
d=6	$S_n=\frac{3(2a_1+12)}{2}$ $=3(a_1+6)$	$S_n=\frac{4(2a_1+18)}{2}$ $=4(a_1+9)$	$S_n=\frac{5(2a_1+24)}{2}$ $=5(a_1+12)$	$S_n=\frac{6(2a_1+30)}{2}$ $=6(a_1+15)$

根據上述式子討論如下：

1. 當項數（n）為偶數時，n−1為奇數，若此時公差（d）為奇數，則$(n-1)d$為奇數，因此$\frac{(n-1)d}{2}$就不是整數。

2. 用圖示解釋如下：

當為奇數項（n=2m+1）時，$\underbrace{a_1\ a_2\ \cdots\ a_m}_{m\text{項}}\ a_{m+1}\ \underbrace{a_{m+2}\ \cdots\ a_{2m}\ a_{2m+1}}_{m\text{項}}$，

a_{m+1}即中間項，恆為正整數。

當為偶數項（n=2p）時，$\underbrace{a_1\ a_2\ \cdots\ a_p}_{p\text{項}}\ \underbrace{a_{p+1}\ \cdots\ a_{2p-1}\ a_{2p}}_{p\text{項}}$，

沒有實際的中間項，故中間項為$\frac{a_p+a_{p+1}}{2}$，又$a_{p+1}=a_p+d$，因此中間項可代換為為$\frac{a_p+a_{p+1}}{2}=\frac{a_p+a_p+d}{2}=a_p+\frac{d}{2}$。因此，若公差為奇數時，中間項就不為整

數。

綜上所述，得到了等差相繼數的規律可分為：①當 n 是奇數或 d 是偶數時，$S_n = nA$；②當 n 是偶數且 d 是奇數，$S_n = n\left(B + \frac{1}{2}\right)$。

接下來，進一步分別來討論 A、B 的範圍限制。由於等差級數的範圍限定在正整數，且項數為 3 項以上，因此要討論 A、B 最小的情況即為當首項（a_1）、公差（d）、項數（n）皆取最小正整數的情況下。

討論 A：取 $a_1 = 1$，$d = 1$，$n = 3$，

$$A = \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}}{n} = \frac{\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2} = \frac{\left[2\times1 + (3-1)\times1\right]}{2} = 2，$$

因此 A 的範圍為 $A \ge 2$。

討論 B：取 $a_1 = 1$，$d = 1$，$n = 4$，

$$B = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}}{n} - \frac{1}{2} = \frac{\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\left[2\times1 + (4-1)\times1\right]}{2} - \frac{1}{2} = 2，$$

因此 B 的範圍為 $B \ge 2$。

小結. 等差相繼數的規律可分為兩種形式：

①當 n 是奇數或 d 是偶數時，$S_n = nA$，$A \ge 2$

②當 n 是偶數且 d 是奇數時，$S_n = n\left(B + \frac{1}{2}\right)$，$B \ge 2$

（二）無法用正整數所組成的等差級數之和來表示的數，即非等差相繼數。

接下來，我們要探討哪些數無法用正整數所組成的等差級數之和來表示。由於最小的等差相繼數為 6（6=1+2+3），因此，小於 6 的正整數皆非等差相繼數。

接著，我們藉由等差相繼數的兩種形式來討論：

1. 由①式可知，$S_n = nA$，

又知 $n \ge 3$ 且 $A \ge 2$，

故 S_n 為 n 和 A 的倍數，

所以 S_n 為合數，即 S_n 不為質數。

2. 由②式可知，當 n 是偶數且 d 是奇數時，$S_n = n\left(B+\frac{1}{2}\right)$，

又知 n 是大於等於 4 的偶數且 $B \ge 2$。

令 $n = 2n'$，$n' \ge 2$，

故 $S_n = n\left(B+\frac{1}{2}\right) = 2n'\left(\frac{2B+1}{2}\right) = n'(2B+1)$，

故 S_n 為 n' 和 $(2B+1)$ 的倍數，

所以 S_n 為合數，即 S_n 不為質數。

因此，由 1. 和 2. 可知，質數無法用正整數所組成的等差級數之和來表示。

小結. 質數必不為等差相繼數，即質數無法用正整數所組成的等差級數之和來表示。

除了質數之外，所有大於等於 6 的合數皆為等差相繼數嗎？根據表 1.1 到表 1.6，我們發現沒有出現級數之和為 8，但 8 是合數，可以表成 2×4，為什麼 8 不能被表示成級數之和呢？說明如下：

由於 $n \ge 3$，故假設 $n = 4$，中間項為 2，如圖示：a_1 a_2 a_3 a_4

意即當 n 為偶數時，沒有實際的中間項。　　　　中間項為 2

故中間項為 $\frac{a_2+a_3}{2} = \frac{a_2+a_2+d}{2} = a_2+\frac{d}{2} = 2$，可表成 $a_2 = 2-\frac{d}{2}$。

因此 $a_1 = 2-\frac{d}{2}-d = 2-\frac{3}{2}d$。

又首項必需為正整數，即 $a_1 = 2-\frac{3}{2}d$ 為正整數。

所以，$2-\frac{3}{2}d \ge 1 \Rightarrow \frac{3}{2}d \le 1 \Rightarrow d \le \frac{2}{3}$，此時 d 不為正整數，故不合。

若使 $d=1$ 代入 $a_1 = 2-\frac{3}{2}d$，此時 $a_1 = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ 不為正整數，亦不合。

換言之，除了S_n為合數外，還要考慮a_1與 d 皆需為正整數。

因此，若將式子$S_n=$項數×中間項$=n\times\left[a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right]$整理後，可得

$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)d}{2}=$中間項，即$a_1=$中間項$-\frac{(n-1)d}{2}$且$a_1\ge 1$。

綜上所述，可用等差級數之和來表示的數，必須滿足$a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}\ge 1$。

小結. 等差相繼數必須滿足$\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}\ge 1$。

根據上述等差相繼數條件限制的判別方法，舉個實例說明如下：求出和為 22 之等差級數。

首先需將 22 分解，$22=2\times 11=4\times\frac{11}{2}$，即 22 可分解成此兩種乘積。

接著再考慮 n，因為$n\ge 3$且為正整數，因此令$n=11$或$n=4$，討論如下。

1. $n=11$，代入$a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}\ge 1$，

得$\frac{22}{11}-\frac{(11-1)d}{2}\ge 1 \Rightarrow 2-5d\ge 1 \Rightarrow d\le\frac{1}{5} \Rightarrow d$無正整數解。

2. $n=4$，代入$a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}\ge 1$，

得$\frac{22}{4}-\frac{(4-1)d}{2}\ge 1 \Rightarrow \frac{11}{2}-\frac{3}{2}d\ge 1 \Rightarrow 11-3d\ge 2 \Rightarrow d\le 3$。

又由小結知， d 需為奇數，所以$d=1$或$d=3$。

當$d=1$，代回原式$a_1=\frac{22}{4}-\frac{(4-1)\times 1}{2}=4$，故級數為 4+5+6+7。

當$d=3$，代回原式$a_1=\frac{22}{4}-\frac{(4-1)\times 3}{2}=1$，故級數為 1+4+7+10。

因此，和為 22 之等差級數為 4+5+6+7 或 1+4+7+10。

由 8 的例子發現，大於等於 6 的合數不一定為等差相繼數，我們想知道還有哪些合數不為等差相繼數。首先，我們知道若 E 是一等差級數的和，可表示為

$E=a_1+(d+a_1)+(2d+a_1)+\cdots+(nd+a_1)$，若將 E 乘上常數 c，則 cE 亦可表示為一等差級數的和 $cE=ca_1+(cd+ca_1)+(2cd+ca_1)+\cdots+(ncd+ca_1)$。接著我們開始討論合數問題，若將合數 G 做質因數分解，設此數可表為 $G=g_1\times g_2\times\cdots\times g_t$，其中 $t\ge 2$ 且 $g_1,g_2,\ldots,g_t$ 屬於質數，不失一般性假設 $g_1\le g_2\le\cdots\le g_t$，可分成兩部分來討論，如下：

1. 在 $g_1\ge 3$ 的情況下：

   因為 G 至少為兩數相乘，即 $G=g_1\times g_2$，

   若取項數為 g_1，中間項為 g_2，

   此時首項為 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}=\frac{g_1\times g_2}{g_1}-\frac{(g_1-1)d}{2}=g_2-\frac{(g_1-1)d}{2}$，

   只要取公差 d 為 2，會使得 $a_1=g_2-\frac{(g_1-1)\times 2}{2}=g_2-g_1+1$，$a_1$ 必會大於等於 1。

   因此，合數 G 必定可以表示成一等差級數之和，即此合數為等差相繼數。

2. 在 $g_1=2$ 時，因為 G 至少為兩數相乘，即 $G=g_1\times g_2$，以下分為幾種情況來討論：

   （1）若 $g_2<5$

   i. 若 $g_2=2$，則 $G=g_1\times g_2=2\times 2=4$，小於 6 的正整數皆非等差相繼數。

   ii. 若 $g_2=g_3=2$，則 $G=g_1\times g_2\times g_3=2\times 2\times 2=8$，

   根據之前的討論，8 不為等差相繼數。

   iii. 若 $g_2=g_3=g_4=2$，則 $G=g_1\times g_2\times g_3\times g_4=2\times 2\times 2\times 2=16=1+3+5+7$，

   此合數為等差相繼數。

   iv. 若 $g_2=3$，則 $G=g_1\times g_2=2\times 3=6=1+2+3$，此合數為等差相繼數。

   v. 若 $g_2=4$，則同 ii。

   （2）若 $g_2\ge 5$，將 G 表示成 $G=2\times g_2=4\times\frac{g_2}{2}$，

   取項數為 4，中間項為 $\frac{g_2}{2}$，

   此時首項為 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}=\frac{2\times g_2}{4}-\frac{(4-1)d}{2}=\frac{g_2-3d}{2}$，

只要取公差 d 為 1，會使得$a_1=\dfrac{g_2-3d}{2}=\dfrac{g_2-3}{2}\geq 1$。

則合數 G 必定可以表示成一等差級數之和，即此合數為等差相繼數。

綜上所述，合數中僅 4 和 8 不為等差相繼數，換言之，其餘合數皆為等差相繼數。

小結. 在合數中，僅 4 和 8 無法用正整數所組成的等差級數之和來表示；意即除了 4 和 8 之外的合數皆為等差相繼數。

綜合以上討論，我們列出 1 到 100 中的**非**等差相繼數：1，2，3，4，5，7，8，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97。

（三）將討論範圍擴大為整數所組成的等差級數之和。

得到上述結果後，我們猜想許多數之所以不是等差相繼數，無法用正整數所組成的等差級數之和來表示，是因為首項需為正整數的限制。若是我們將討論範圍擴大，將等差級數加入 0 和負整數來討論，是否能讓每個數皆能表為整數所組成的級數之和呢？

因此，接下來我們改變討論的範圍，將級數的範圍擴大到整數，即改變首項的範圍限制為$a_1=\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{(n-1)d}{2}\in\mathbb{Z}$。以下分三部分討論。

1. 質數

先舉一個質數例子來試試看：求出和為 7 之等差級數。

求解：

首先將 7 分解，$7=7\times1=2\times\dfrac{7}{2}$，即 7 可分解成此兩種乘積

但由於$n\geq3$，故$n=2$不合，僅能討論$n=7$的情況

將 $n=7$，代入 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$，得 $a_1=\frac{7}{7}-\frac{(7-1)d}{2}=1-3d$

$\because d\in\mathbb{N}$，即d為任意正整數時皆可使$a_1\in\mathbb{Z}$

此時若使 $d=1$ 代回 a_1，得 $a_1=\frac{7}{7}-\frac{(7-1)\times 1}{2}=1-3=-2$

即 7 可表示為 $7=(-2)+(-1)+0+1+2+3+4$

此外，若使 $d=2$ 代回 a_1，得 $a_1=\frac{7}{7}-\frac{(7-1)\times 2}{2}=1-6=-5$

即 7 可表示為 $7=(-5)+(-3)+(-1)+1+3+5+7$

我們發現，將級數的範圍擴大到整數來討論，則質數可表為整數所組成的級數之和，說明如下：

（1）除了 2 以外的質數

由於除了 2 以外的質數皆大於等於 3，因此只要將級數和 S_n 分解成

$S_n=S_n\times 1$，再取項數 $n=S_n$，代入 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}=1-\frac{(n-1)d}{2}$

$\because S_n$為大於等於3之質數

$\therefore S_n$必為奇數，令$S_n=n=2r+1$，$r\in\mathbb{N}$

再代回 $a_1=1-\frac{(n-1)d}{2}=1-\frac{(2r+1-1)d}{2}=1-rd$

$\because d\in\mathbb{N}$，$r\in\mathbb{N}$，即d與r為任意正整數時皆可使$a_1\in\mathbb{Z}$

（2）最小的質數 2

首先將 2 分解，$2=2\times 1=4\times\frac{1}{2}$，即 2 可分解成此兩種乘積

但由於 $n\geq 3$，故 $n=2$ 不合，僅能討論 $n=4$ 的情況

將 $n=4$，代入 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$，得 $a_1=\frac{2}{4}-\frac{(4-1)d}{2}=\frac{1-3d}{2}$

$\because d\in\mathbb{N}$，若取d為任意奇數時皆可使$a_1\in\mathbb{Z}$

此時若使 $d=3$ 代回 a_1，得 $a_1=\frac{1-3\times 3}{2}=-4$

即 2 可表示為 $2=(-4)+(-1)+2+5$

2. 合數

由於最小的合數為 4，因此只要將級數和 S_n 分解成 $S_n=S_n\times 1$

取項數 $n=S_n$，代入 $a_1=\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}=1-\frac{(n-1)d}{2}$，只要取 d 為偶數，則 $a_1\in\mathbb{Z}$

我們發現，將級數的範圍擴大到整數來討論，則所有合數皆可表為整數所組成的級數之和。

3. 非質數也非合數的 1

將 1 分解，$1=1\times1=2\times\frac{1}{2}$。

但由於 $n\geq3$，故兩種情況皆不合。

因此，1 無法表示為整數所組成的級數之和。

小結. 除了 1 以外的正整數，皆可用「整數」所組成的等差級數之和來表示。

總結.

針對研究的兩個主要問題，我們發現的結果如下：

（一）

1. 等差相繼數的規律可分為兩種形式：

①當 n 是奇數或 d 是偶數時，$S_n=nA$，$A\geq2$。

②當 n 是偶數且 d 是奇數時，$S_n=n\left(B+\frac{1}{2}\right)$，$B\geq2$。

2. 等差相繼數必須滿足 $\frac{S_n}{n}-\frac{(n-1)d}{2}\geq1$。

（二）

1. 除了 1、2、3、4、5、8 及質數以外的正整數，皆為等差相繼數。

2. 除了 1 以外的正整數，皆可用「整數」所組成的等差級數之和來表示。

九、　評鑑與檢討

在數與數之間，融入數學課程所學到的原理，深入探討等差級數這個主題：延伸數列之間的相互性，從中找出巧妙的變化及規則，再從變化及規則中找出特例，思考特例為何不符合規則架構。藉由老師的循循善誘及同學間的腦力激盪，並參考書中對於論述與證明的系統化的表達。數，可以有很多不一樣的分類，例如質數和合數；可以利用運算符號寫出不一樣的組合方式；再者，融合代數和運算符號，作為深入探討、證明的表達工具。

從無到有，再從雜亂無章的想法中，慢慢的彙整出研究內容的架構、團隊互相溝通、釐清想法與突破盲點，有條理的呈現研究內容及發現，是我在這個獨立研究中最大的收穫。

數與數之間的奧妙，實在無法在短短研究中全然呈現，未來可以根據其他不同主題繼續深入的研究及探討。例如，在本研究中並未詳細探討一個等差相繼數有幾種不同等差級數之和的表示方法，期望未來可以延伸相關主題。

十、　參考資料

台北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學（譯）(1998)。**數學思考**（原作者：J. Mason, L. Burton, & K. Stacey）。台北市：九章。

李銘城（2005）。正整數分解成正等差數列和之研究。**龍華科技大學學報，18**，91-95。