

# 彰化縣 102 年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

## 作品說明書

作品編號：

- 組別：
- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 國小高年級組<br>(四、五、六年級) | <input checked="" type="checkbox"/> 數學類 |
| <input checked="" type="checkbox"/> 國中組      | <input type="checkbox"/> 自然與生活科技類       |
|  | <input type="checkbox"/> 人文社會類          |

作品名稱： 正方形裁切重組成各種多邊形及其應用

(巧拼及益智遊戲拼圖)

## 目錄

一、摘要	4
二、選擇主題	4
三、擬定工作進度表	5
四、擬定初步的研究問題	5
五、研究結果及討論	6
六、記錄研究的發現	25
七、擬定正式計畫及研究問題	30
八、提出研究成果	30
九、評鑑	31
十、參考資料	31

## 第一階段 研究訓練階段（由教師撰寫）

### 一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究課程，最早為學校設計提供給資優班的課程，初時以帶領學生進行科展研究為主，由教師指導學生從課本延伸，找尋研究題材，並設計相關實驗進行主題的探究，這些通常要花費相當長的時間投入，是以除正式課程檢視研究進度外，學生通常得利用假日時間返校進行研究。

近二年來，隨著彰化縣辦理獨立研究競賽，始了解獨立研究較科展而言，更強調與學習的連貫性，強調延伸所學以擬定想探究的主題，並擴大範圍至全面向，是以除數學、自然與生活科技外，更有人文科學均為其範疇。這充份給了想進行研究的學生一個好的機會，無論是具有數理學術優異傾向、語文學術優異傾向又或者兩者都有的學生一個適合他們展現的舞台。

學校曾延請彰師大特教系教授蒞校進行獨立研究的講座，鼓勵學生人人均可嘗試參與研究，並於輔導室，設備組，相關領域召集人處備有近年彰化縣獨立研究得獎成果冊供師生借閱，更於學校首頁闢有獨立研究文件專案專區，提供獨立研究方法及相關訊息下載。學校熱心的老師亦會主動詢問，鼓勵學生組隊參與並掌握其進度，使學生能把握暑假期間，投入研究。今年校內更預定先進行校內初選，以提振參賽的質與量。

### 二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學生的研究及發表能力，將是十二年國教新政策下的一個受重視的環節。學校整合科展與近年之彰化縣獨立研究競賽紙本書面（成果冊、光碟）提供師生借閱，並在網站上闢有科學教育及獨立研究專區提供其他研究資訊（包含研究方法、如何擬定主題及研究計畫、歷年簡章辦法、得獎作品等）。教師群中，亦會由有經驗的老師帶動小班群共同激勵，強化學生參賽的動機及給予正確的指導。感謝本校設備組長規畫實施多場的科展系列研習，讓學生也可將參加科展研習所習得

的研究方法，套用在此獨立研究。硬體方面，學生無論是週六、日或暑假期間，均全面開放電腦教室、E化教室等電腦設備，供學生使用，並有老師陪同現場指導。雖是漫漫時日，但也是另類學校的特色。

## 第二階段 獨立研究階段

### 一、摘要

大賣場常見各式形狀的巧拼，買回家後經過拼湊可形成矩形，甚至可符合家中磁磚的大小，於是想想巧拼的製作過程，如何將**原本矩形大小經切割後組合成各種多邊形**；另外本組想到市售益智遊戲拼圖只能完成一種結果，於是思考是否可以拼成一種以上的結果。

幾何圖形之間的等面積轉換向來十分有趣，從小所學的三角形，正方形，矩形，梯形，平行四邊形等皆可進行**等面積的圖形轉換**。在本研究中，本組先著重於探討幾個常見的基本幾何圖形(例如三角形，矩形，平行四邊形，梯形，正六角星)，將**正方形分割後重新組合成上述幾個基本幾何圖形的方法**。但當本組完成初步的研究時，它常**受限於分割完後圖形的邊長的諸多限制，因此本組繼續找出了其臨界值的存在之處**。

### 二、選擇主題

曾經在數學的相關雜誌上看到數學史上的三大難題，其一便是化圓為方，這問題持續困擾著數學家，後來才被證明這是辦不到的事情。於是本組便反向思考，是否可以將正方形經由適當的切割重新組合成各式的基本幾何圖形呢？對於這種幾何圖形分割與重組的數學幾何遊戲，我們覺得這很有趣，於是便往這個方向去做思考。

### 三、擬定工作進度表

經過這樣的思考之後，本組決定先找出是否有通用的分割方法，由於幾何圖形分割的範圍相當地廣泛，本組決定只研究國中常用的圖形，例如：三角形、特殊四邊形(矩形、平行四邊形、梯形)、正六角星形，工作進度也正式擬定為正方形分割成各種多邊形(三角形、矩形、平行四邊形、梯形、正六角星)之分割方法

●預定進度甘梯圖(Gantt Chart)：以為進度控制及檢討之依據。

主題：正方形裁切重組成各種多邊形及其應用								
日期 工作項目	9/7 ~ 9/14 第一週	9/15 ~ 9/22 第二週	9/23 ~ 9/30 第三週	10/1 ~ 10/7 第四週	10/8 ~ 10/15 第五週	10/16 ~ 10/23 第六週	10/24 ~ 10/31 第七週	備註
	文獻蒐集及探討主題							
研究哪些圖形的重組								
正方形->三角形								
正方形->矩形								
正方形->平行四邊形								
正方形->梯形								
正方形->任意四邊形								
正方形->正六角星								
探討臨界值的存在								
超過臨界值的解決方法								
預定進度累計百分比	5	20	30	40	70	80	100	

### 四、擬定初步的研究問題

- 將正方形重新分割組合成各種多邊形  
(三角形、矩形、平行四邊形、梯形、正六角星)通用的分割方法
- 不可依通用的分割方法之臨界值與解決方法。

## 五、研究結果及討論

### 正方形→三角形

(一)目的：正方形經過適當的切割後，重組成為與原圖形面積相等的三角形。

(二)想法：

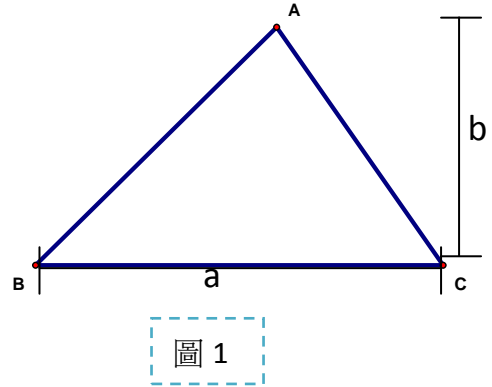
我們決定反向思考，

先定義任一三角形，如圖 1， $a > b$

如果任意三角形可以經由切割再重組成正方形

那麼正方形就可以再經由切割組合成

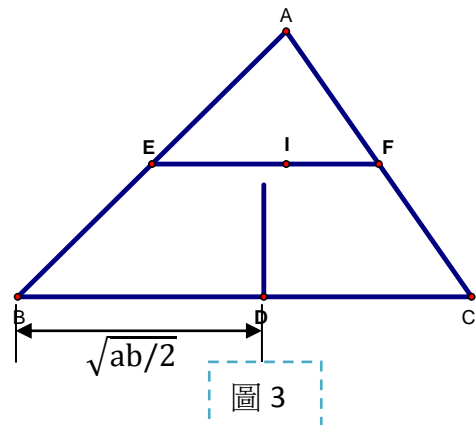
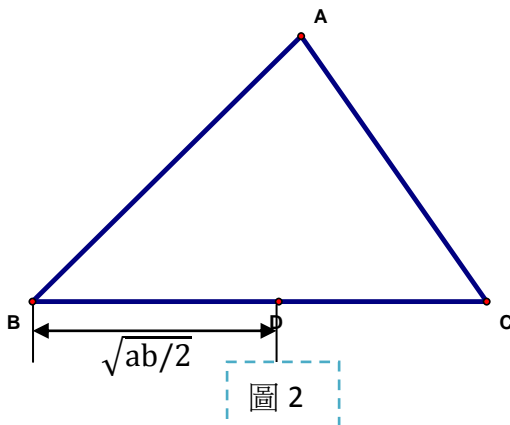
原來的任意三角形了。



a. 直接由三角形兩邊中點連線

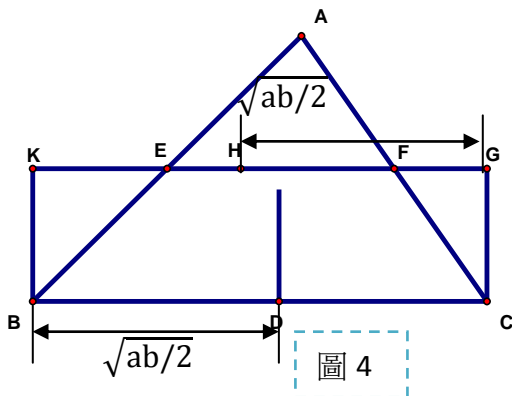
(1)因為面積須相等，因此必須從三角形的最大邊上取正方形的其中一段邊長，當正方形的其中一邊，如圖 2。

(2)由於正方形任一邊的相鄰兩個邊皆成直角，因此 D 點須向上垂直切 1 刀為 **<第一刀>**，再取三角形兩邊中點連線為 **<第二刀>**，並取正方形的邊長當長度，必須從 C 點向上做垂線垂直於三角形兩邊中點連線，由垂足往三角形兩邊中點連線取一正方形邊長長度，如圖 3。

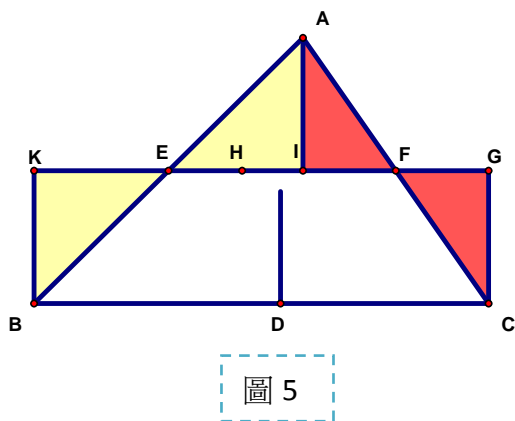


b. 不直接由三角形兩邊中點連線取一正方形邊長長度的原因有二：

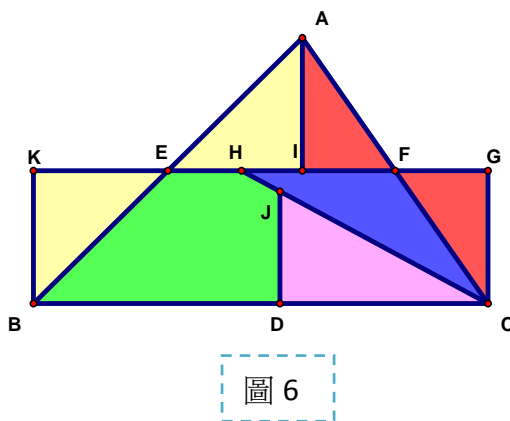
- 1、三角形兩邊中點連線可能不夠長。
- 2、另一邊沒有垂直，不能成為正方形的鄰邊；(取三角形兩邊中點的原因：為填補 $\triangle CFG$ ，取中點只須再切一刀從頂點作垂線，使 $\triangle CFG$ 全等於 $\triangle AFI$ )，如圖 4。



- 3、由頂點往三角形兩邊中點連線作垂線為〈第三刀〉，填補 $\triangle CFG$ 、 $\triangle BEK$ ，如圖 5。



- 4、由 H 往 C 切割為〈第四刀〉。(H 不垂直切的原因：會切到 $\overline{BD}$ )，如圖 6。



(三)作法：

1. 以 B 點為圓心， $\sqrt{ab/2}$  為半徑在 $\overline{BC}$ 畫弧得 D 點。
2. 分別取 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 兩邊中點 E、F，並連接 $\overline{EF}$ 。
3. 延伸 $\overline{EF}$ ，並從 C 點往 $\overline{EF}$ 作垂線，交 $\overline{EF}$ 於 G 點，並以 G 點為圓心， $\sqrt{ab/2}$  為半徑在 $\overline{EF}$ 上畫弧得 H 點，並連接 $\overline{HC}$ 。
4. 由 A 點向 $\overline{EF}$ 作垂線得 I 點。
5. 由 D 點向 $\overline{EF}$ 作垂線，與 $\overline{HC}$ 交 J 點。

6. 完成後如圖 7，並切割  $\overline{DJ}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{HC}$ 、 $\overline{AI}$ ，並拼得正方形，如圖 8。

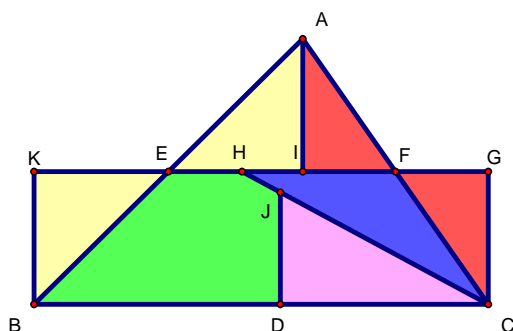


圖 7

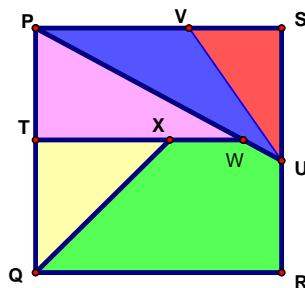


圖 8

(四)可切割的臨界：

想法：當底、高的比到一定比例會使得切割點 J 點與 H 點重合，此時只須切三刀便可組合為正方形，如圖 9、圖 10。但超過此底、高比(細長型三角形)便無法以上述方法切割。

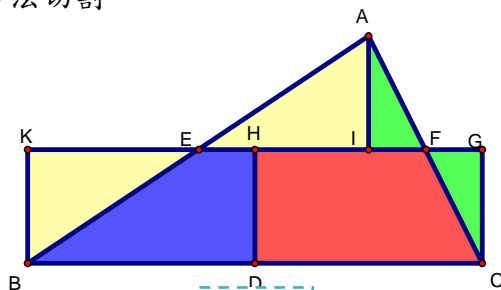


圖 9

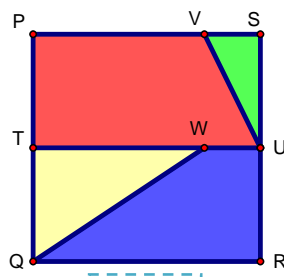


圖 10

(五)臨界值：當  $a = 2\sqrt{ab/2}$  時， $a^2 = 2ab \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a : b = 2 : 1$ ，

底、高比為 2: 1 時為臨界值，如圖 11、圖 12。

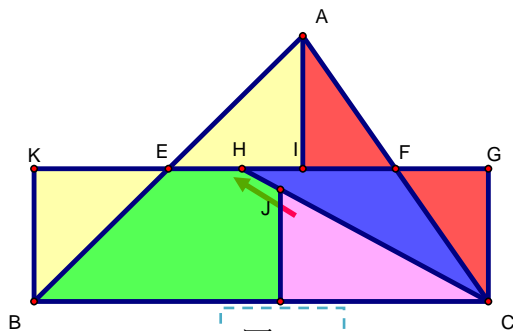


圖 11

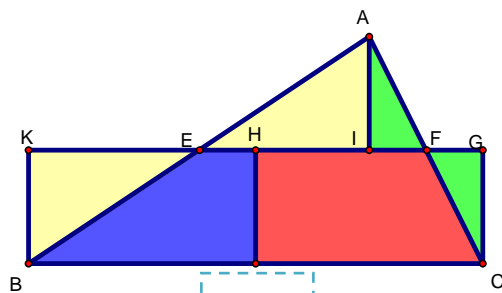


圖 12

超過臨界值可能的結果：(如圖 13、圖 14)



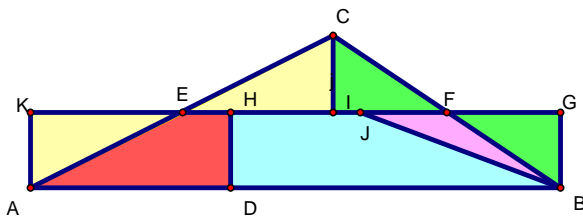


圖 13

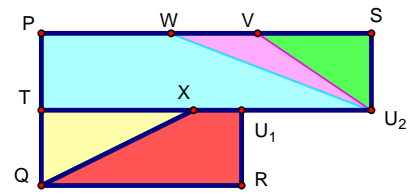


圖 14

(六)超過臨界值的解決方法：將底、高比值超過 2 的先取兩邊中點連成中線，頂點向底邊作垂線切割往底邊兩邊填補變成矩形再用以矩形(長寬比超過 4)之切割方式。

以底為 7，高為 1 為例，(如圖 15、圖 16、圖 17、圖 18：共需切 5 刀)

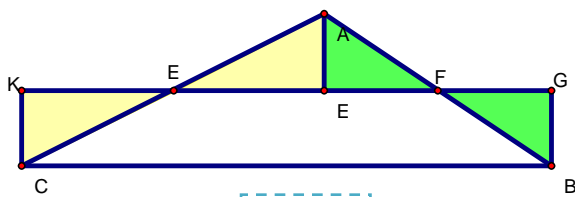


圖 15

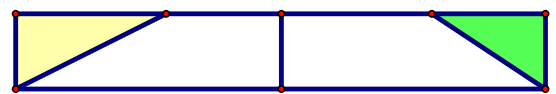


圖 16

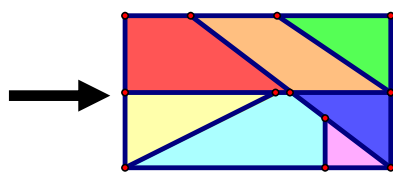


圖 17

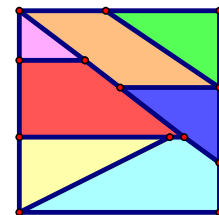


圖 18

備註：多出來的切割數取決於切幾次矩形中點，再疊合，長寬比才會小於 4，詳見矩形切法 P. 8，P. 9。

## 正方形→矩形

(一)目的：正方形經過適當的切割後，重組成為與原圖形面積相等的矩形。

(二)想法：和上述論點相同，  
如果任意矩形可以經由切割再重組成  
正方形，那麼正方形就可以再經由切割  
組合成原來的任意三角形了

先定義一矩形，如圖 19，  $a > b$

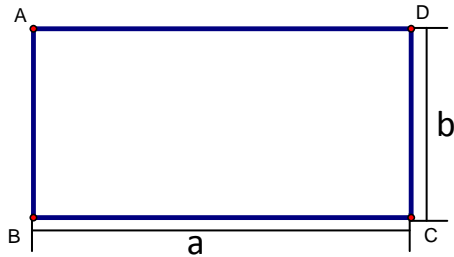


圖 19

- 1、因為面積須相等，因此必須從矩形的最大邊上，取正方形的其中一段邊長長度當正方形的其中一邊 $\overline{BE}$ ，如圖 20。
- 2、再從其對邊取正方形邊長長度當正方形另一邊 $\overline{FD}$ ，如圖 21。

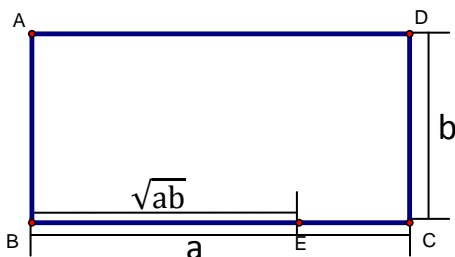


圖 20

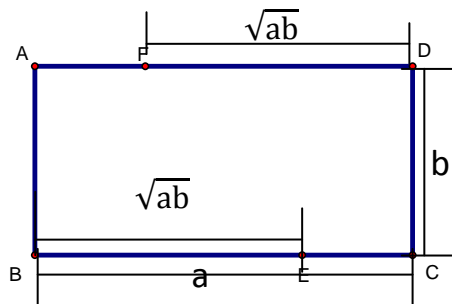


圖 21

- 3、連接 $\overline{FC}$ 切第一刀，如圖 22，後將 $\triangle FCD$ 往左上平移讓 $\overline{BE}$ 和 $\overline{FD}$ 剛好形成正方形的上、下邊。
- 4、再由 E 向上垂直切第二刀到 $\overline{FC}$ ，如圖 23，形成一個小 $\triangle GEC$  剛好補在 $\overline{AF}$ 的上方。

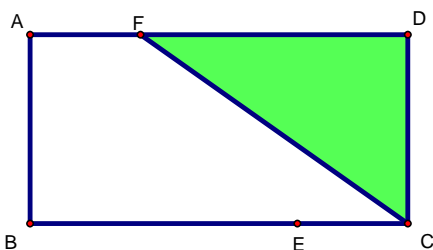


圖 22

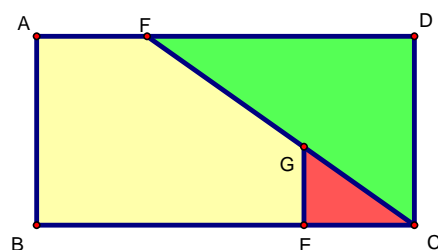


圖 23

(三)作法：

1. 以 B 點為圓心， $\sqrt{ab}$  為半徑在  $\overline{BC}$  畫弧得 E 點。
2. 以 D 點為圓心， $\sqrt{ab}$  為半徑在  $\overline{AD}$  畫弧得 F 點，連接  $\overline{FC}$ 。
3. 由 E 點作  $\overline{BC}$  之垂線，與  $\overline{FC}$  相交於 G 點。
4. 完成圖，如圖 24，並切割  $\overline{FC}$ 、 $\overline{GE}$ ，即可拼得正方形 PQRS，如圖 25。

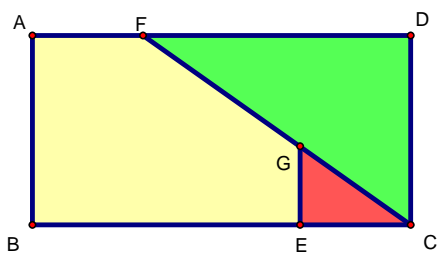


圖 24

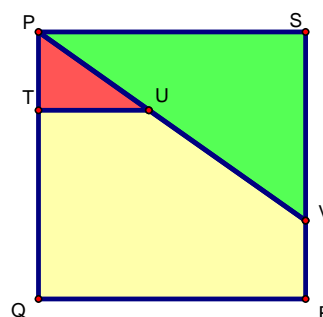


圖 25

(四)可切割的臨界：

想法：當長寬的比達到一定比例，使得切割點 G 點與 F 點重合，此時只須切一刀便可組合為正方形，如圖 26、27，但超過此長寬比(細長型矩形)便無法以上述方法切割。

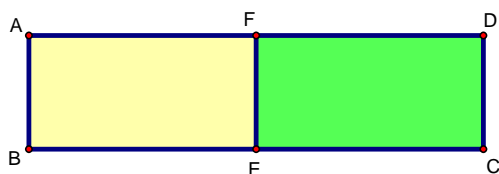


圖 26

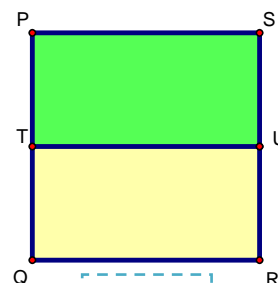


圖 27

(五)臨界值：當  $a = 2\sqrt{ab}$  時， $a^2 = 4ab \Rightarrow a = 4b \Rightarrow a : b = 4 : 1$ ，

長寬比為 4 : 1 時為臨界值，如圖 28、圖 29。

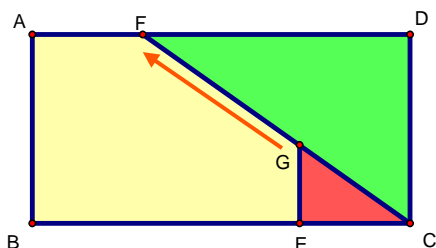


圖 28

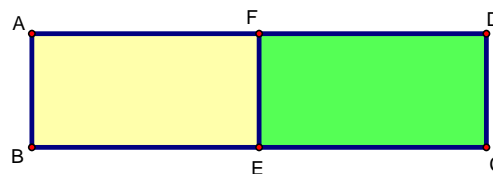


圖 29

(六) 超過臨界值的解決方法：若長寬的比值超過 4 時，先從長邊中點切割成兩個矩形向上疊合，直到長寬比值小於 4 便可以上述之研究方法切割之。

以長為 8，寬為 1 為例，如圖 30、圖 31、圖 32：

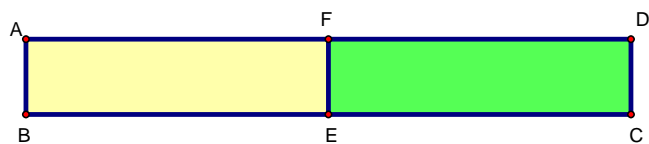


圖 30

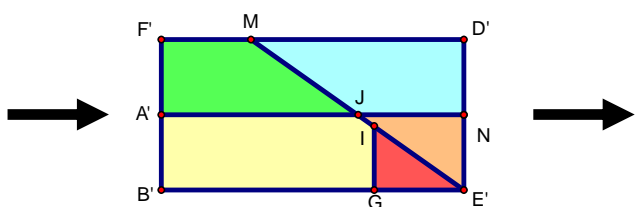


圖 31

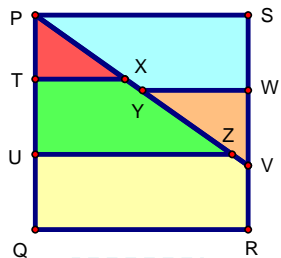
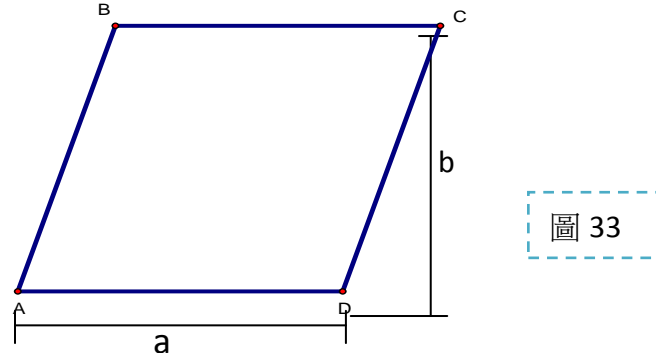


圖 32

## 正方形→平行四邊形

(一)目的：正方形經適當的切割後，重組成為與原圖形面積相等的平行四邊形。

(二)想法：和一、二論點相同，先定義一平行四邊形，如圖 33， $a=b$



- 1、 因為底等於高，所以正方形之兩對邊，即是平行四邊形的兩對邊不須切割，如圖 34。
- 2、 正方形的另外兩對邊須取平行四邊形之兩斜邊中點，垂直切割，得兩三角形，並作填補便補成正方形，如圖 35。

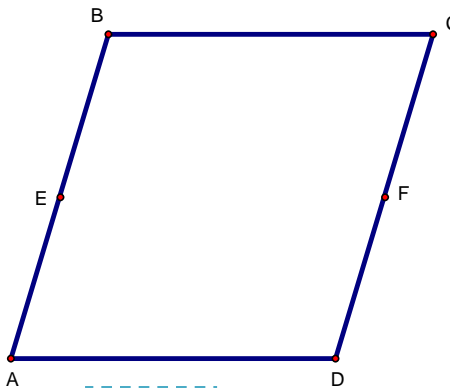


圖 34

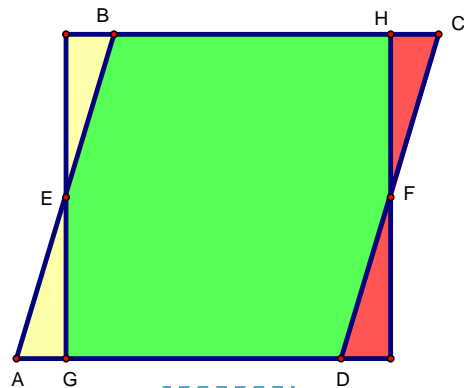


圖 35

(三)作法：

- 1、 在 $\overline{AB}$ 上，取 $\overline{AB}$ 之中點 E 點，過 E 點作 $\overline{AD}$ 之垂線相交於 G 點。
- 2、 同理在 $\overline{CD}$ 上，取 $\overline{CD}$ 之中點 F 點，過 F 點作 $\overline{CB}$ 之垂線相交於 H 點。
- 3、 切割 $\overline{EG}$ 、 $\overline{FH}$ ，重組後得正方形 PQRS，如圖 36、圖 37。

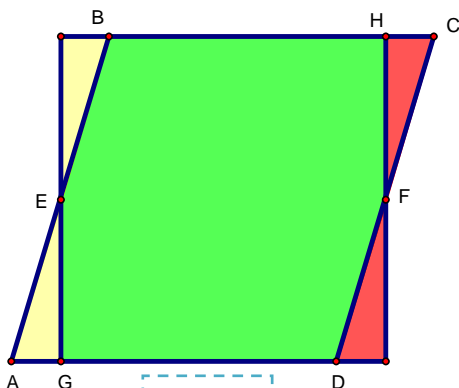


圖 36

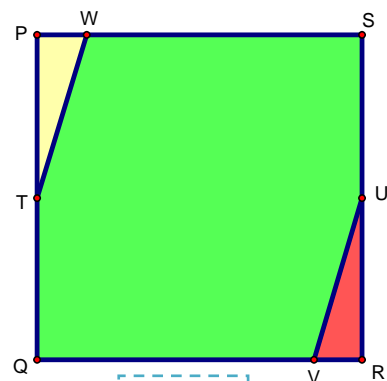


圖 37

(四)想法：先定義一平行四邊形，如圖 38， $a > b$

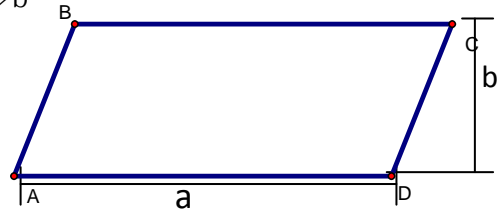


圖 38

- 1、如圖 39，作一垂線 $\overline{DH}$ 切**第一刀**， $\triangle CHD$  補到左側 $\triangle AFB$ ，形成矩形，再以矩形的方式切割。
- 2、因為面積須相等，因此須從平行四邊形的**最大邊**上，取正方形的其中一段邊長長度當正方形的一邊 $\overline{AE}$ ，如圖 40。



圖 39

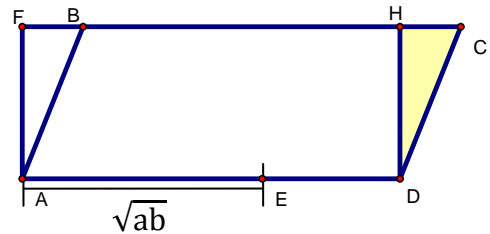


圖 40

- 3、再從其對邊取正方形邊長長度當正方形另一邊 $\overline{HG}$ ，如圖 41。
- 4、接著切割方法跟矩形相同，如圖 42，切**第二刀** $\overline{GD}$ 。

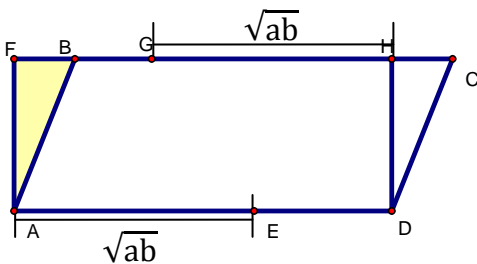


圖 41

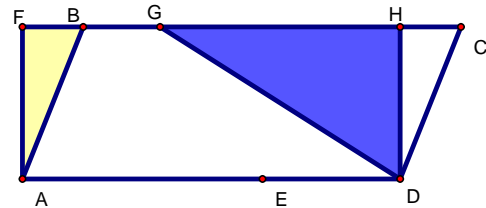


圖 42

- 5、如圖 43，從 E 點垂直向上切**第三刀**，形成一個小 $\triangle EID$  剛好補在 $\overline{FG}$ 的上方。

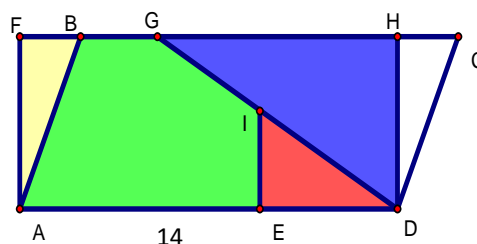


圖 43

(五)作法：

1. 過 D 點作  $\overline{BC}$  之垂線，交  $\overline{BC}$  於 H 點。
2. 過 A 點作  $\overline{BC}$  之垂線，交  $\overline{BC}$  之延長線於 F 點。
3. 以 A 點為圓心， $\sqrt{ab}$  為半徑在  $\overline{AD}$  畫弧得 E 點。
4. 以 H 點為圓心， $\sqrt{ab}$  為半徑在  $\overline{CF}$  畫弧得 G 點，連接  $\overline{GD}$ 。
5. 過 E 點作  $\overline{AD}$  之垂線，交  $\overline{GD}$  於 I 點。
6. 完成圖如圖 44，並切割  $\overline{DH}$ 、 $\overline{GD}$ 、 $\overline{EI}$ ，即可拼得正方形 PQRS，如圖 45。

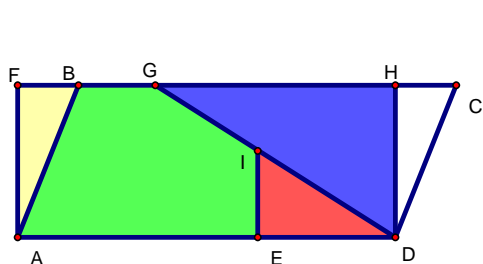


圖 44

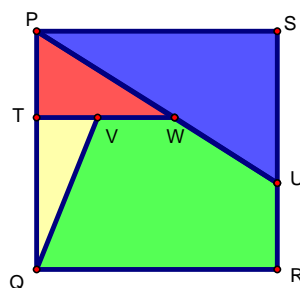


圖 45

(六)可切割的臨界：

想法：當底與高的比達到一定比例，此時切割點 I 點與 G 點重合，故只須切二刀便可組成正方形 PQRS，如圖 46、圖 47，但超過此底與高的比(細長型平行四邊形)便無法依上述方法切割。

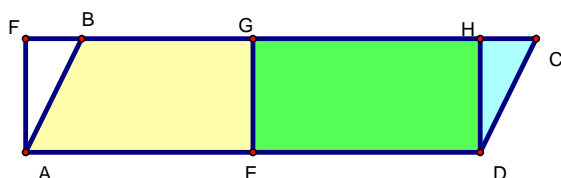


圖 46

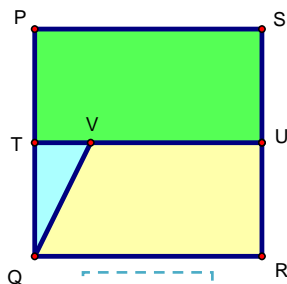


圖 47

(七)臨界值：當  $a = 2\sqrt{ab}$ ， $a^2 = 4ab \Rightarrow a = 4b \Rightarrow a : b = 4 : 1$ ，

底與高的比為 4 : 1 時為臨界值。(如圖 48、圖 49)

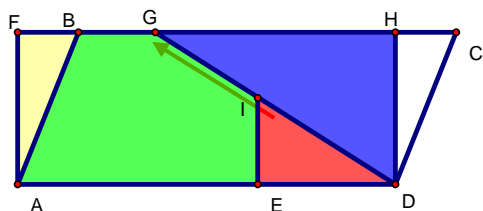


圖 48

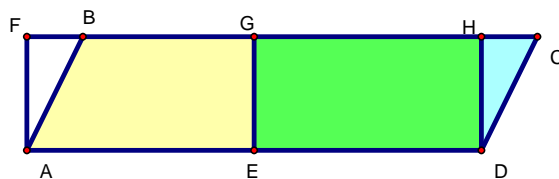


圖 49

(八) 超過臨界值的解決方法：將底與高的比值超過 4 時，先切  $\overline{DH}$  將  $\triangle DHC$  補到  $\triangle AFB$  變成矩形，再從其長邊中點切割成兩個矩形向上疊合，直到底與高的比值小於 4，便可依上述之研究方法切割之。以底為 6，高為 1 為例，如圖 50、圖 51、圖 52：

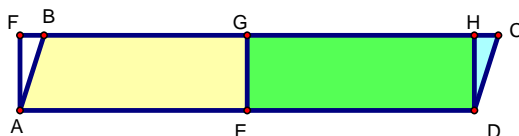


圖 50

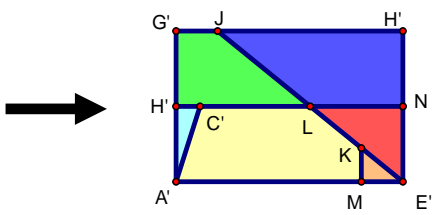


圖 51

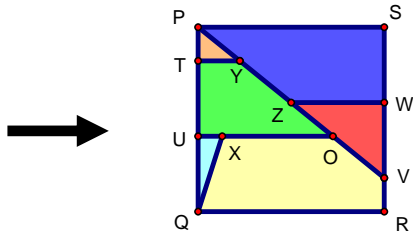


圖 52

### 正方形→梯形

(一)目的：正方形經過適當的切割後，重組成為與原圖形面積相等的梯形。

(二)想法：和一、二、三相同

先定義一梯形，如圖 52，上底加下底大於 2 倍高時， $(a+b) > 2c$

其中 a、b 為上、下底，c 為高。

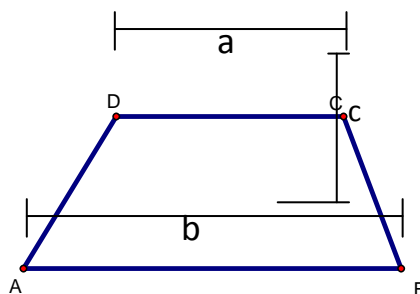


圖 52

1、取兩腰中點，並作垂直上、下底的垂線，以切割 **二刀**，並填補兩小三角形，使圖形變成矩形，如圖 53。

2、因為上底加下底大於 2 倍高， $\overline{FI} > \overline{GI}$ ，所以可用切割矩形的方法，在  $\overline{FI}$ 、

$\overline{HG}$  上取正方形之上下兩邊長  $\sqrt{(a+b)c/2}$ ，如圖 54。



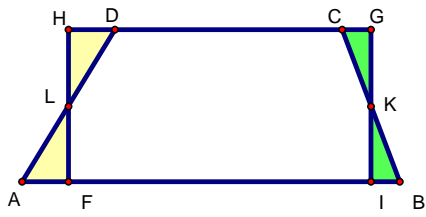


圖 53

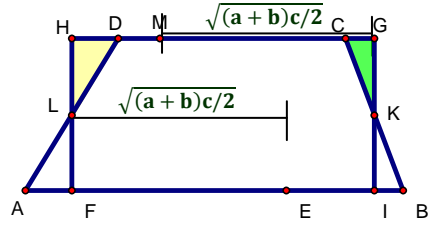


圖 54

3、切割 $\overline{MI}$ 為**第三刀**，不能垂直向下切，因為會切到另一個正方形的邊，如圖 55。

4、E 點垂直往上切到 $\overline{MI}$ 為**第四刀**，得一小 $\triangle IEJ$ ，剛好補到 $\overline{HM}$ 之上方，如圖 56。

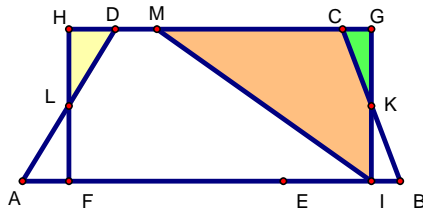


圖 55

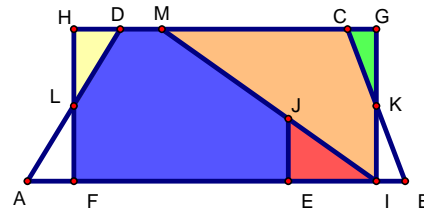


圖 56

(三)作法：

- 1、取 $\overline{AD}$ 之中點 L，過 L 點作垂直 $\overline{AB}$ 之垂線交 $\overline{AB}$ 於 F 點，並與 $\overline{CD}$ 之延長線交於 H 點。
- 2、取 $\overline{BC}$ 之中點 K，過 K 點作垂直 $\overline{AB}$ 之垂線交 $\overline{AB}$ 於 I 點，並與 $\overline{CD}$ 之延長線交於 G 點。
- 3、以 G 當圓心， $\sqrt{(a+b)c/2}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{CD}$ 於 M 點。
- 4、以 F 當圓心， $\sqrt{(a+b)c/2}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$ 於 E 點。
- 5、連接 $\overline{MI}$ 線段，並由 E 點作 $\overline{AB}$ 之垂線交 $\overline{MI}$ 於 J 點。
- 6、如圖 57，切割 $\overline{LF}$ 、 $\overline{KI}$ 、 $\overline{MI}$ 、 $\overline{EJ}$ ，再重新組成正方形 PQRS，如圖 58。

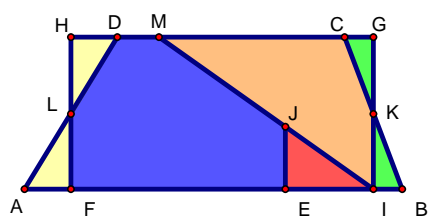


圖 57

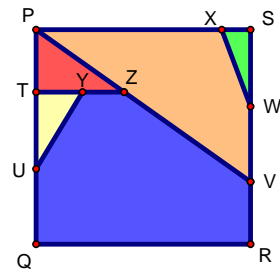


圖 58

(四)想法：上底加下底等於 2 倍高時， $(a+b)=2c$

- 1、 取兩腰中點 E、F，如圖 59。
- 2、 由 E、F 垂直往底邊  $\overline{AB}$  切割，因為梯形之高與  $\overline{GH}$  剛好是正方形的邊長，故直接切割 **二刀**，使底下兩個  $\triangle AEI$ 、 $\triangle BFJ$  剛好填補於上方的兩個  $\triangle DEG$ 、 $\triangle CFH$ ，如圖 60。

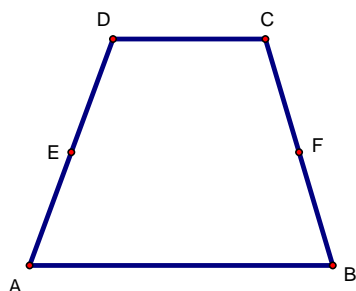


圖 59

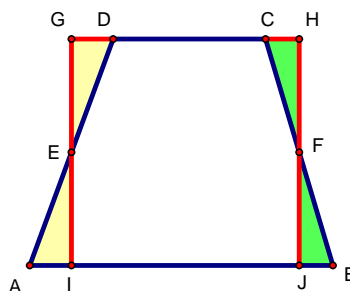


圖 60

(五)作法：

- 1、 在  $\overline{AD}$  上取中點 E，過 E 點作垂直  $\overline{AB}$  之垂線交  $\overline{AB}$  於 I 點，並與  $\overline{CD}$  之延長線交於 G 點。
- 2、 在  $\overline{BC}$  上取中點 F，過 F 點作垂直  $\overline{AB}$  之垂線交  $\overline{AB}$  於 J 點，並與  $\overline{CD}$  之延長線交於 H 點。
- 3、 如圖 61，切割  $\overline{EI}$ 、 $\overline{FJ}$ ，並將  $\triangle EAI$  填補於  $\triangle EDG$ ， $\triangle FBJ$  填補於  $\triangle FCH$  後，即可組成一正方形 PQRS，如圖 62。

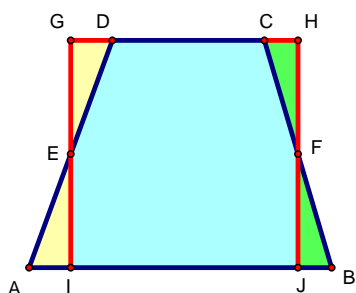


圖 61

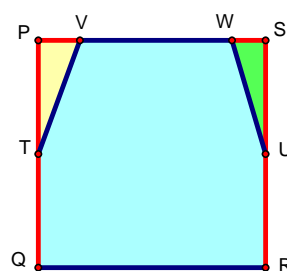


圖 62

(六)想法：上底加下底小於 2 倍高時， $(a+b)<2c$

1、取梯形兩腰之中點 N、L，如圖 63。

2、過兩腰之中點 N、L，垂直往下切各一刀(第一、第二刀)，讓 $\triangle NAE$  填補於 $\triangle NDG$ ， $\triangle BFL$  填補 $\triangle CHL$ ，變成長方形，如圖 64。

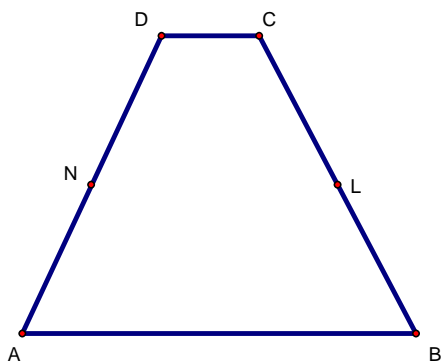


圖 63

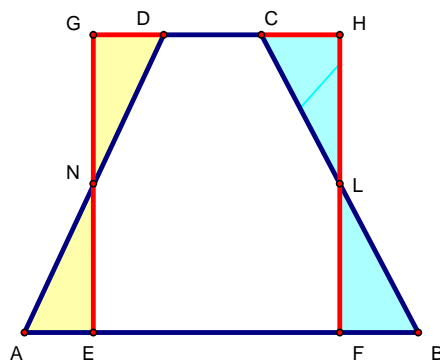


圖 64

3、發現變成長方形後，其長邊變為縱向，因此須從長邊 $\overline{GE}$ 、 $\overline{FH}$ 取正方形邊長 $\sqrt{(a+b)c/2}$  當作正方形的兩對邊，如圖 65。

4、如圖 66，從 K 點連接到 E 點切(第三刀)。

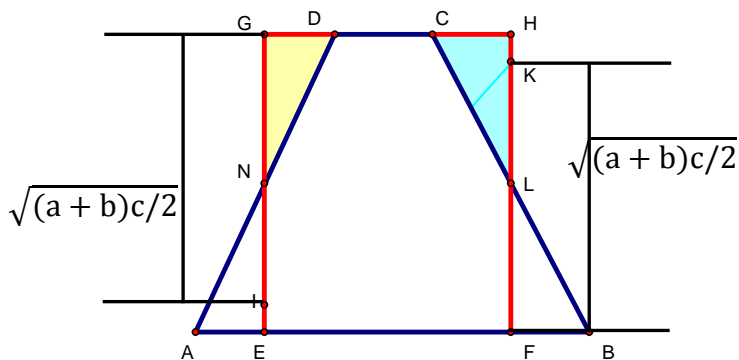


圖 65

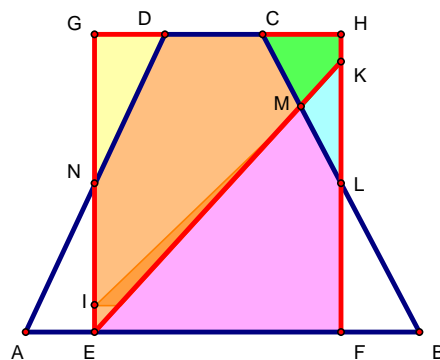


圖 66

- 5、 如圖 67，再由 I 點垂直  $\overline{EG}$  切 **第四刀**，交  $\overline{KE}$  於 J 點，接著將  $\triangle JIE$  補於  $\overline{HK}$  之右方。

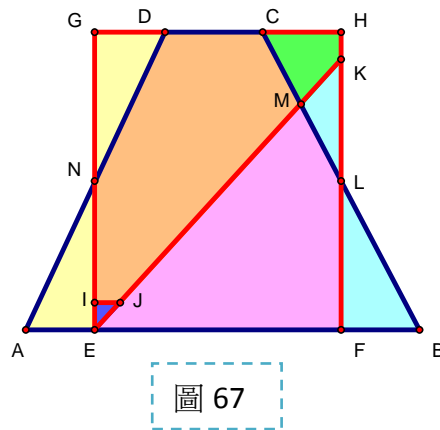


圖 67

(七)作法：

- 1、 在  $\overline{AD}$  上取中點 N，過 N 點作垂直  $\overline{AB}$  之垂線交  $\overline{AB}$  於 E 點，並與  $\overline{CD}$  之延長線交於 G 點。
- 2、 在  $\overline{BC}$  上取中點 L，過 L 點作垂直  $\overline{AB}$  之垂線交  $\overline{AB}$  於 F 點，並與  $\overline{CD}$  之延長線交於 H 點。
- 3、 以 G 當圓心， $\sqrt{(a+b)c}/2$  為半徑畫弧，交  $\overline{GE}$  於 I 點。
- 4、 以 F 當圓心， $\sqrt{(a+b)c}/2$  為半徑畫弧，交  $\overline{FH}$  於 K 點。
- 5、 連接  $\overline{KE}$  線段，並由 I 點作  $\overline{GE}$  之垂線交  $\overline{KE}$  於 J 點。
- 6、 如圖 68，切割  $\overline{NE}$ 、 $\overline{LF}$ 、 $\overline{KE}$ 、 $\overline{IJ}$ ，再重新組成正方形 PQRS，如圖 69。

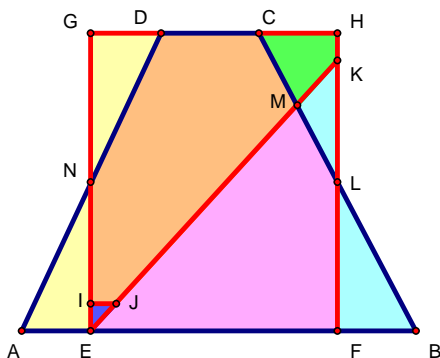


圖 68

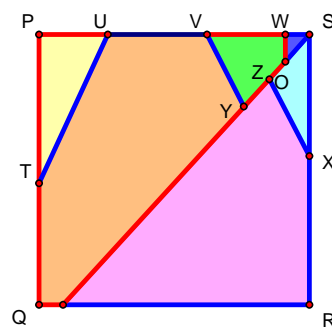


圖 69

(八)可切割的臨界：

想法：當上底和下底的和與高的比達到一定比例，此時切割點 J 點與 M 點重合，故只須切三刀便可組合為正方形，如圖 70、圖 71，但超過此比例(細長型梯形)便無法以上述方法切割。

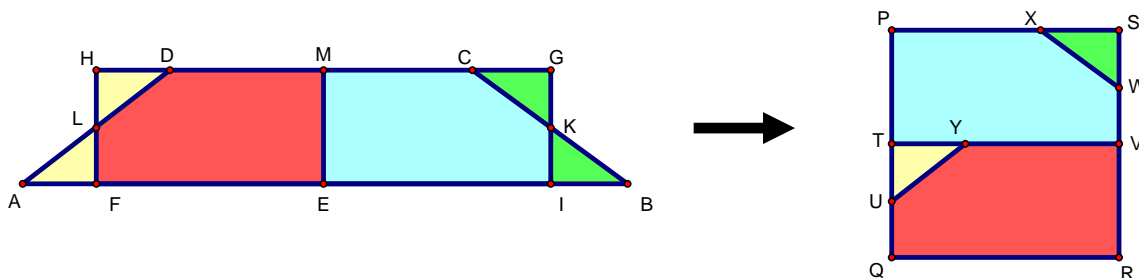


圖 70

圖 71

(九)臨界值：當  $(a+b)/2 = 2\sqrt{(a+b)c}/2$  時， $\frac{(a+b)^2}{4} = 2(a+b)c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 4c$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} : c = 4 : 1 \Rightarrow (a+b) : c = 8 : 1$ ，故上底和下底之和與高的比為 8 : 1

時為臨界值，如圖 72、圖 73。

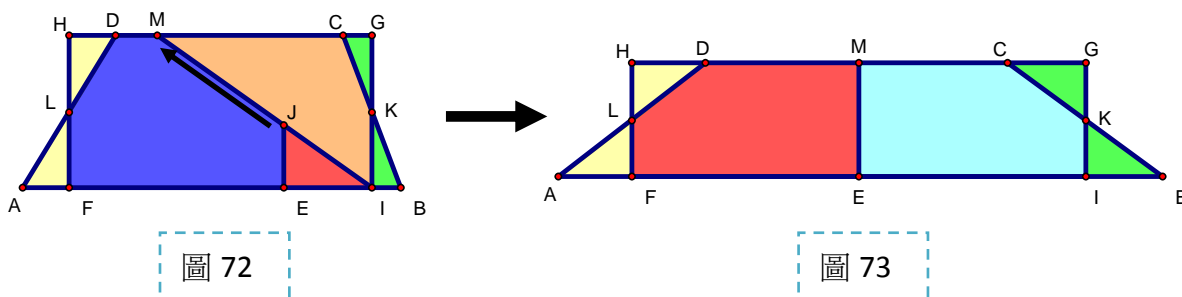
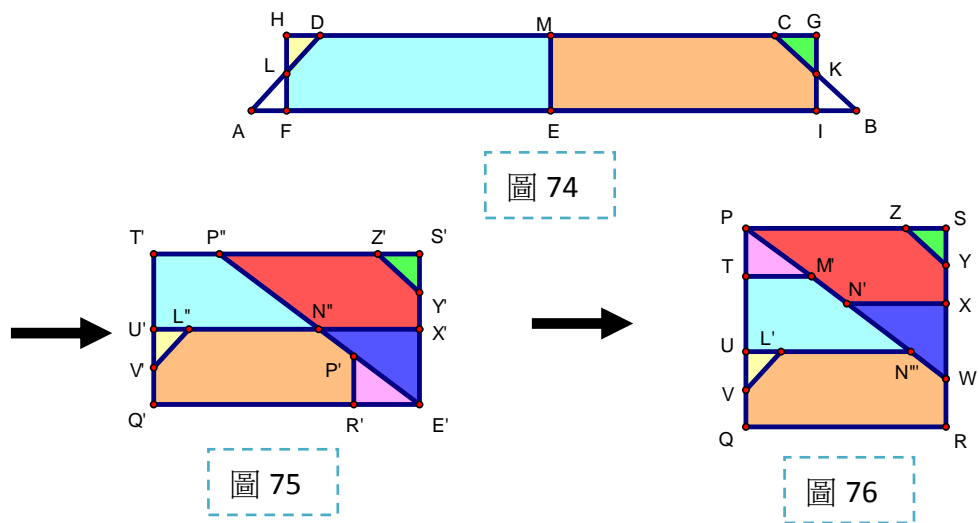


圖 72

圖 73

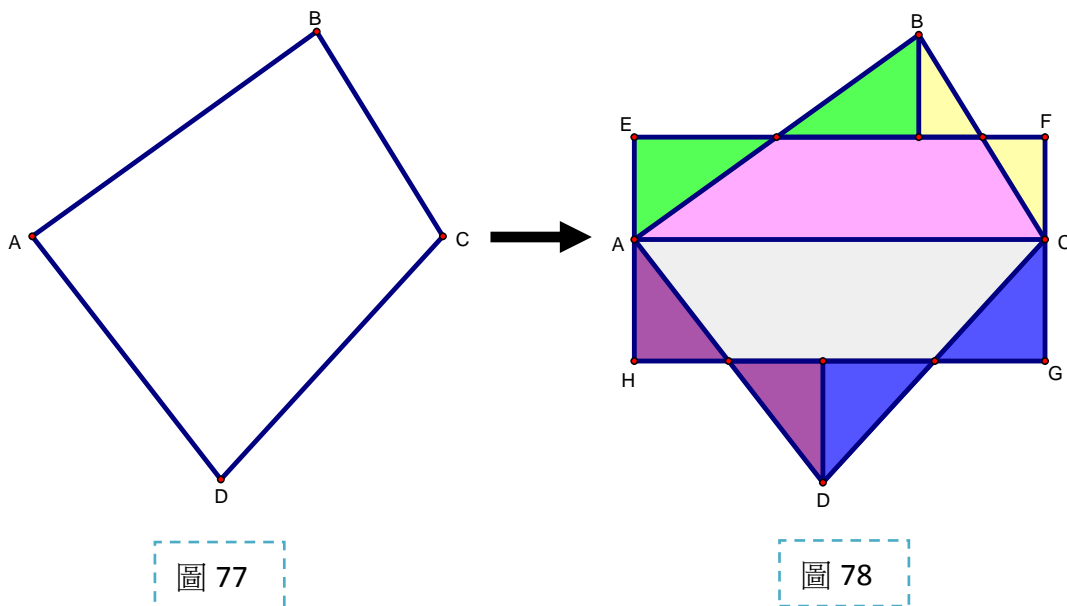
(十) 超過臨界值的解決方法：當上底和下底之和與高的比值超過 8 時，先切割  $\overline{HF}$  將  $\triangle ALF$  補到  $\triangle DLH$ ， $\triangle BKI$  補到  $\triangle CKG$ ，變成矩形後，再從其長邊之中點切割成兩個矩形向上疊合，直到長寬比值小於 8，便可以依上述之研究方法切割。以上底和下底之和為 8，高為 1 為例，如圖 74、圖 75、圖 76：



(十一) 延伸：正方形→任意四邊形

作法：

- 1、 連接四邊形 ABCD 之對角線  $\overline{AC}$ ，將四邊形分割為  $\triangle ABC$  與  $\triangle ACD$ 。
- 2、 同三角形之切割法，將  $\triangle ABC$  進行切割後重組成矩形 ACFE；同理將  $\triangle ADC$  進行切割後重組成矩形 ACGH。
- 3、 將兩個矩形 ACFE 與 ACGH 拼成一個大矩形 EFGH 後，依矩形之切割法，進行切割後重組成正方形如圖 77、圖 78，即為所求。



## 正方形→正六角星

(一)目的：正方形經過適當的切割後，重組成為與原圖形面積相等的正六角星

(二)想法：先定義一正六角星 ABCDEF，如圖 79

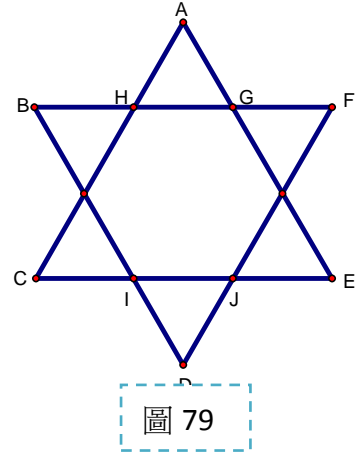


圖 79

1、將正六角星去掉兩個角，則正六角星可補成一長方形 BCEF，使其面積恰為  $ab$ ，設存在正方形 PQRS，使正方形面積等於正六角星 ABCDEF，則正方形之邊長為  $\sqrt{ab}$ ，如圖 80、圖 81。

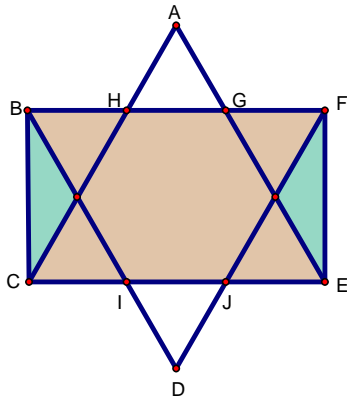


圖 80

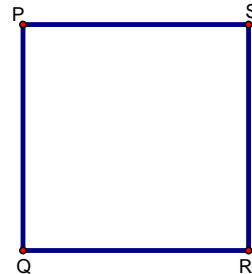


圖 81

2、取正方形中的直角  $\triangle STR$ ，使其斜邊  $ST$  等於  $BF$ ，切割  $\triangle STR$  並將其斜邊  $ST$  貼齊  $BF$ ，產生一全等的  $\triangle BLF$ ，如圖 82、圖 83。

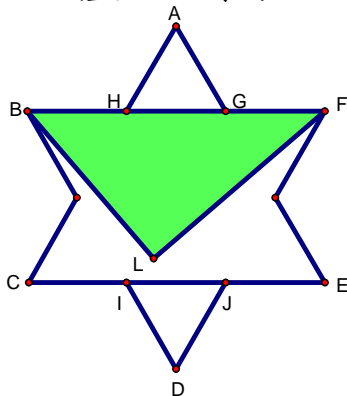


圖 82

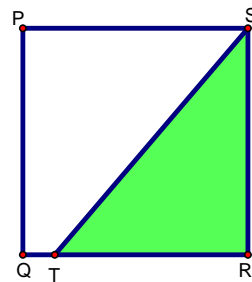


圖 83

3、沿 BL 切割交 CE 於 K 點，因為線段 LF 長度為 $\sqrt{ab}$ ，所以必為正方形之一邊，  
如圖 84。

4、將原先的兩個角，補於六角星左右兩個缺角，再進行重組即可達成，如圖  
85、圖 86。

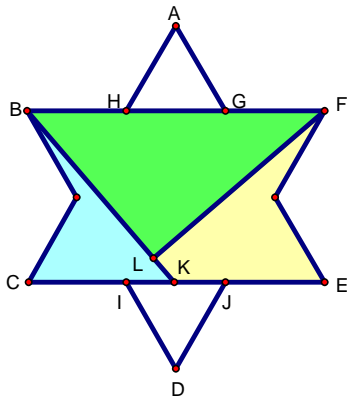


圖 84

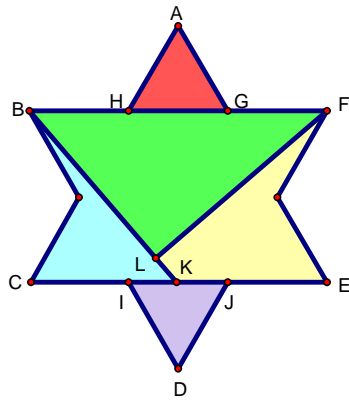


圖 85

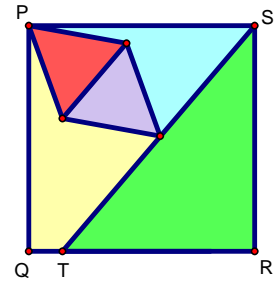


圖 86

(三)作法：

連接 GH 和 IJ，以 B 為圓心， $\sqrt{ab}$ 為半徑畫弧交 CE 於 K，作 FL 垂直 BK，此  
時將六角星分割成五個區域如圖 87 所示，將這五個區域重組，即可形成正方形  
PQRS，如圖 88 所示。

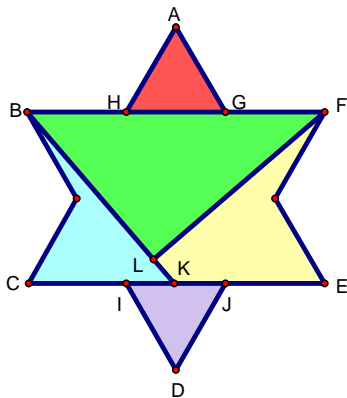


圖 87

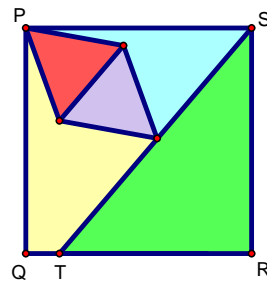
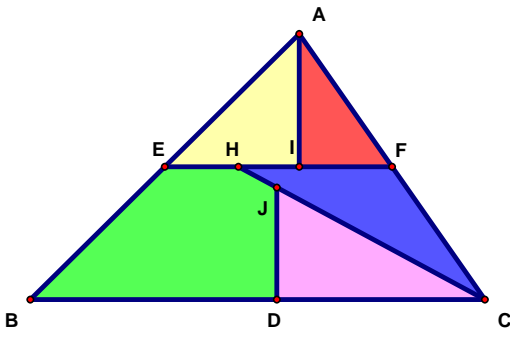
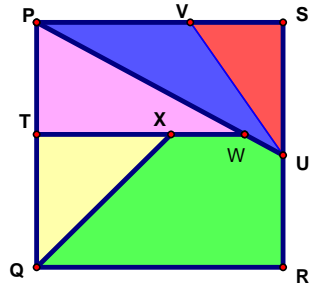
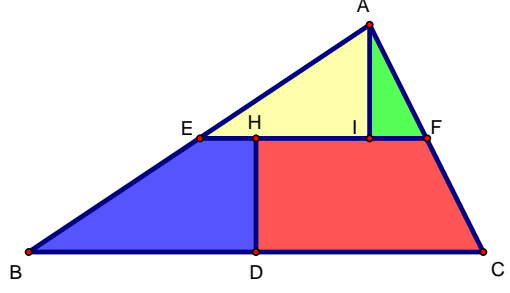
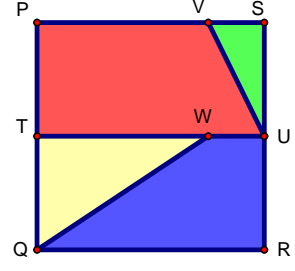
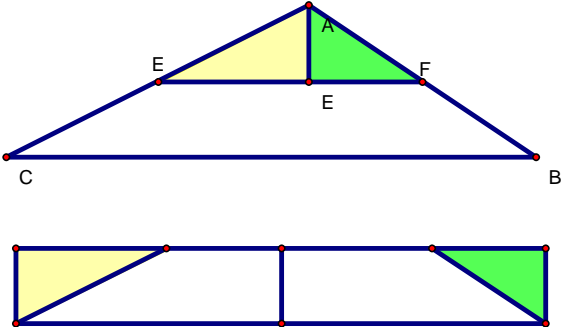
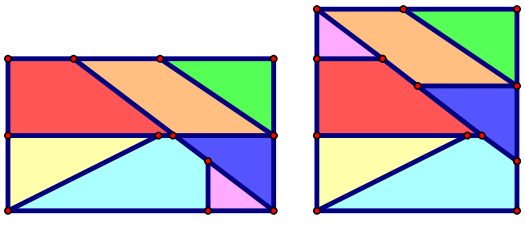
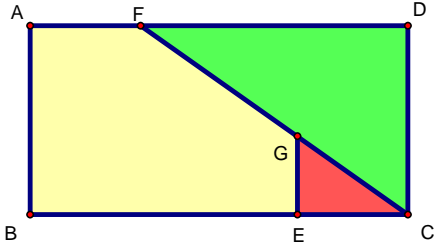
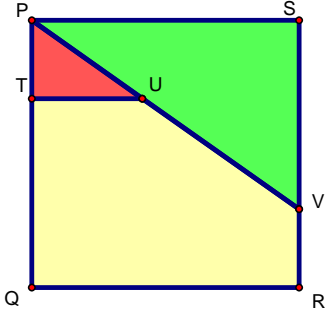
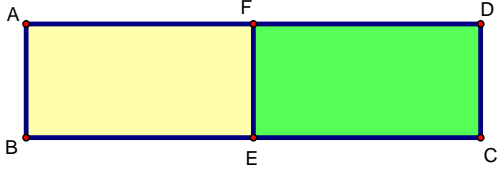
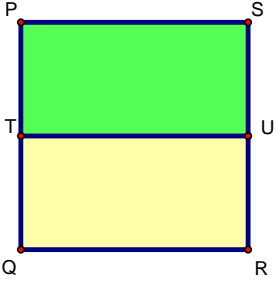
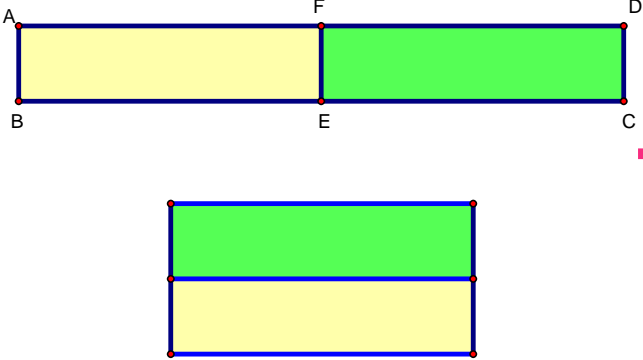
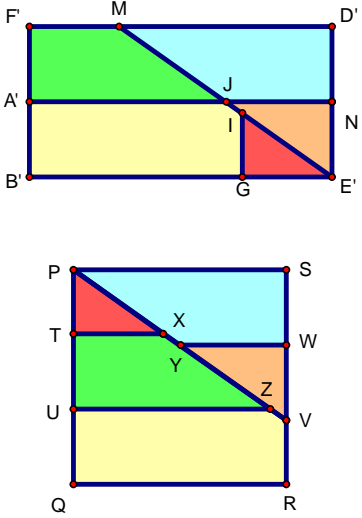


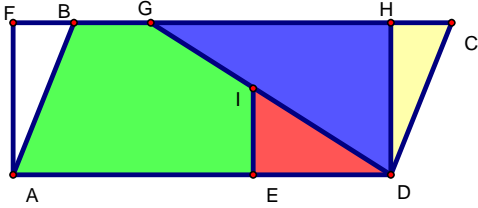
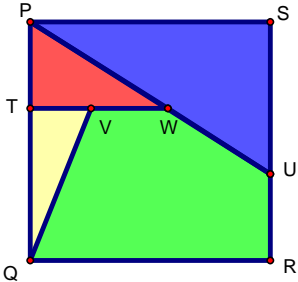
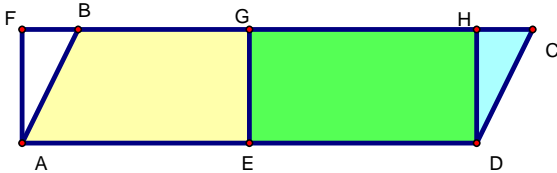
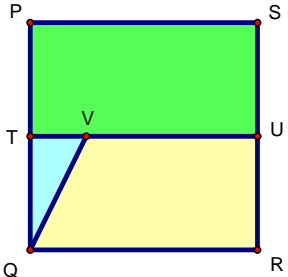
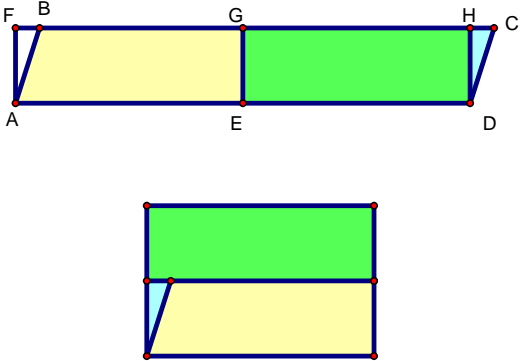
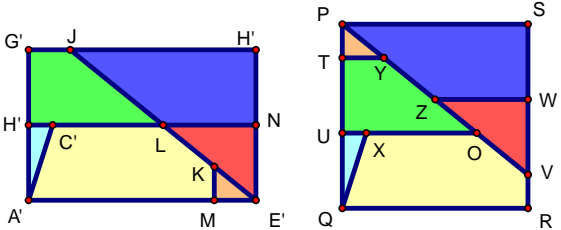
圖 88



## 六、記錄研究的發現

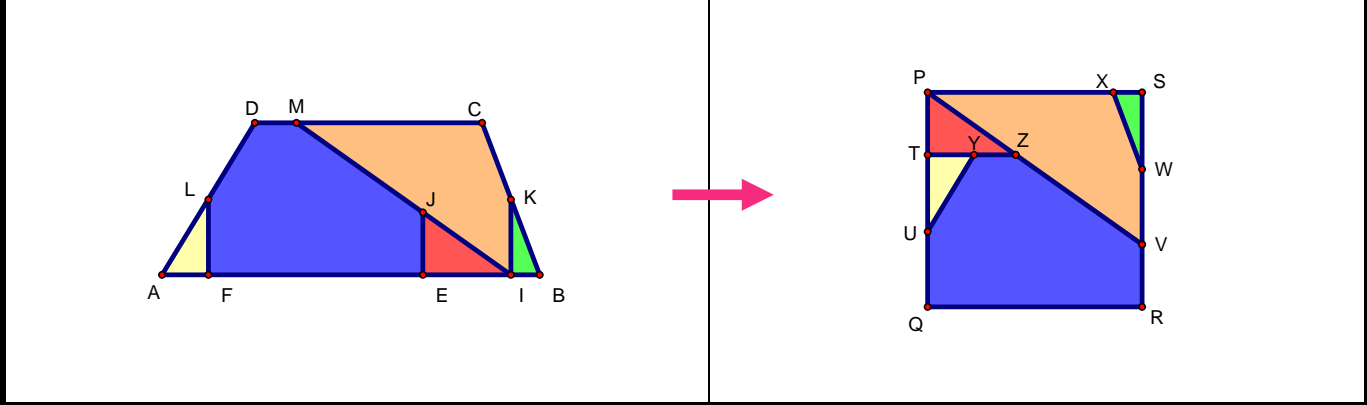
<p>圖形名稱：三角形</p>	<p>條件：底、高比值小於 2</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：三角形</p>	<p>條件：底、高比值等於 2</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：三角形</p>	<p>條件：底、高比值大於 2</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

<p>圖形名稱：矩形</p>	<p>條件：長、寬比值小於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：矩形</p>	<p>條件：長、寬比值等於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：矩形</p>	<p>條件：長、寬比值大於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

<p>圖形名稱：平行四邊形</p>	<p>條件：底、高比值小於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：平行四邊形</p>	<p>條件：底、高比值等於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	
<p>圖形名稱：平行四邊形</p>	<p>條件：底、高比值大於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

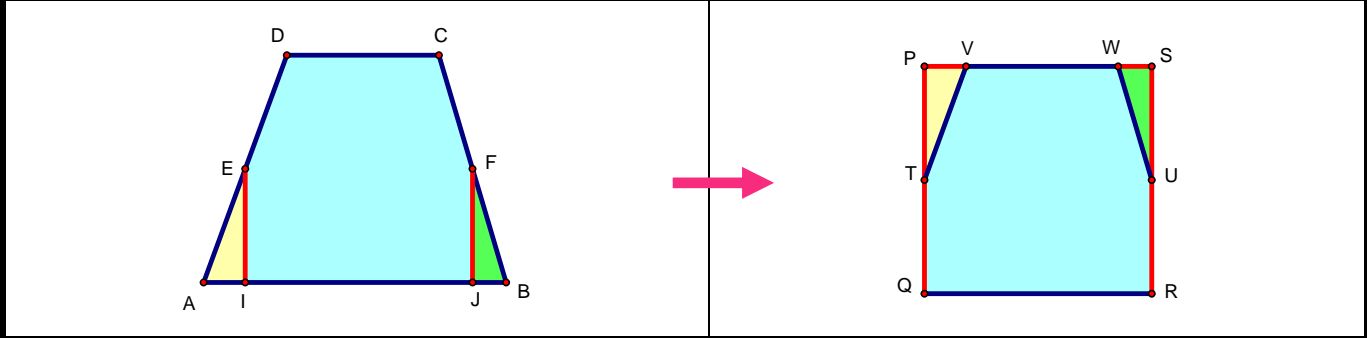
圖形名稱：梯形	條件：上下底和、高比值小於 8 上底加下底大於 2 倍高時， $(a+b) > 2c$
---------	--

原圖切割	重組正方形
------	-------



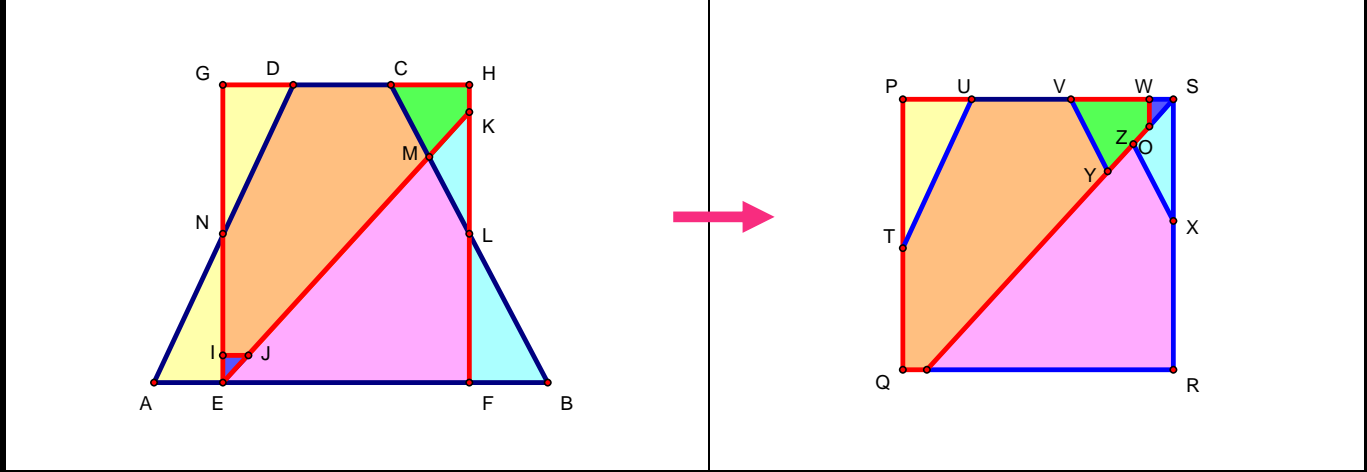
圖形名稱：梯形	條件：上下底和、高比值小於 8 上底加下底等於 2 倍高時， $(a+b) = 2c$
---------	--

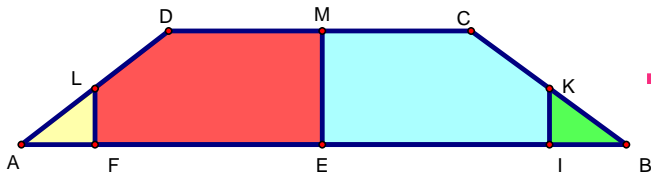
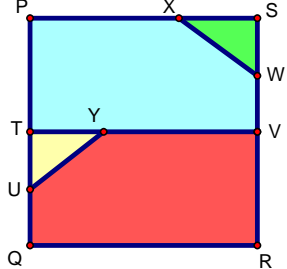
原圖切割	重組正方形
------	-------

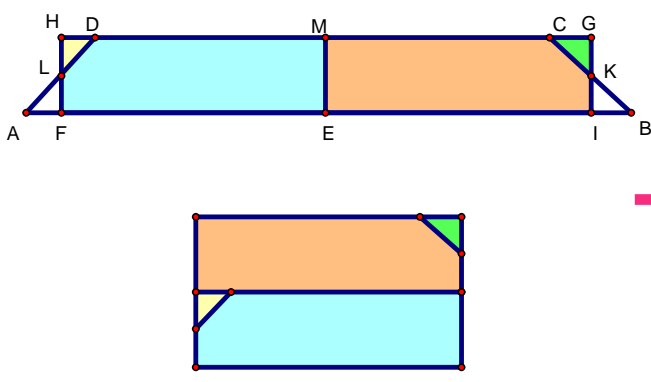
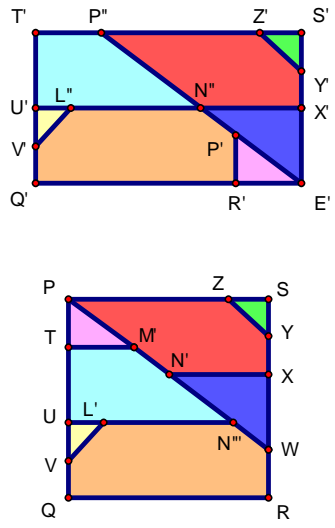


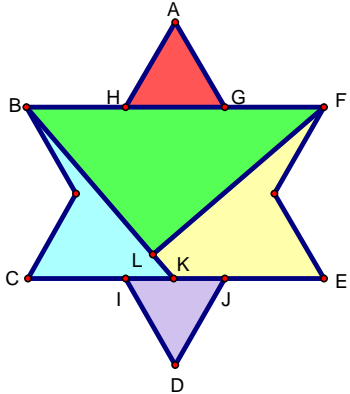
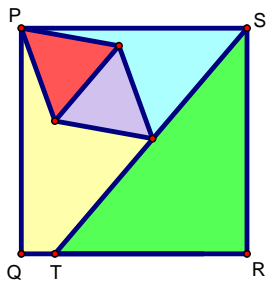
圖形名稱：梯形	條件：上下底和、高比值小於 8 上底加下底小於 2 倍高時， $(a+b) < 2c$
---------	--

原圖切割	重組正方形
------	-------



<p>圖形名稱：梯形</p>	<p>條件：上下底和、高比值等於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

<p>圖形名稱：梯形</p>	<p>條件：上下底和、高比值小於 4</p>
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

<p>圖形名稱：正六角星</p>	
<p>原圖切割</p>	<p>重組正方形</p>
	

### 七、擬定正式計畫及研究問題

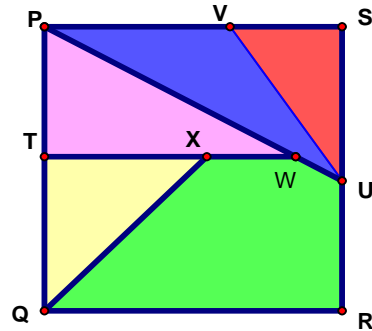
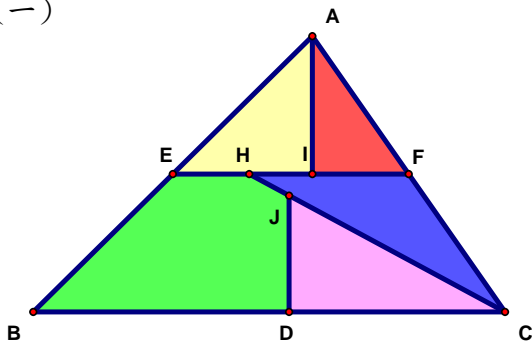
1. 將正方形重新分割組合成各種多邊形通用及不可通用的分割方法
2. 應用於益智遊戲拼圖之構想

### 八、提出研究成果

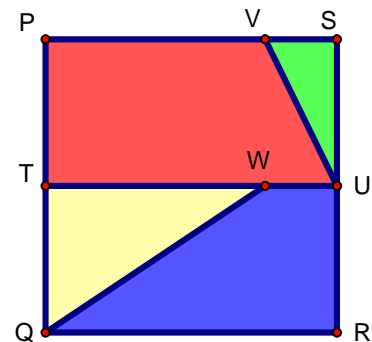
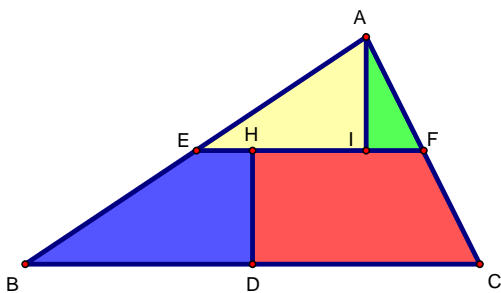
本組將其應用於益智遊戲拼圖，用於幼兒腦力開發之益智拼圖，有鑑於市售拼圖只能完成一種結果，我們將研究結果，應用於設計幼兒拼圖，並使一組拼圖，可拼成 2 種的結果。

每一塊不同顏色的巧拼可以拼成兩種同面積但是不同形狀的拼圖。

(一)



(二)



其餘同 P25-P29 記錄研究的發現

## 九、評鑑與檢討

### 1. 省思

做研究不像原先想像的簡單，這次本組幾位同學參與獨立研究活動，從開始研究前的訂定題目、蒐集資料一直到解決問題，過程中除了個人的思考之外，另外還必須學習與他人合作，最後再做統整，參與這次獨立研究，讓**本組有機會在過程中找到問題並試著解決問題**，研究的過程中雖然辛苦，但也讓我們學習到很多課本上沒有的知識。

### 2. 檢討與改進

「工欲善其事必先利其器」，事前必須做足功課，很多的面向都是我們經過討論之後，才發覺原來可以或者不行，對我們來說，最困難的就是**臨界值的找尋**，因為不確定是否存在，只有經過反覆的測試，加上老師的指導，再者是**幾何切割的範圍相當的廣，除了國中學過的幾何圖形之外，還必須從網路上涉獵沒學過的幾何圖形，並且採用分工合作的方式**，協調分工，共同設計與引導，所以我們想還有更多努力的空間，這份研究也一定可以再精進，希望能夠經過多次的討論與修正，今後在獨立研究態度的養成將夠更加完善。

## 十、參考資料：

- <一> 國民中學數學科課本。二下。康軒版。
- <二> 黃家禮 著。幾何明珠(第二版)。九章出版社。
- <三> 亨斯貝爾格 著。數學中的智巧 民 84。凡異出版社。